Horlogerie Théorique

par

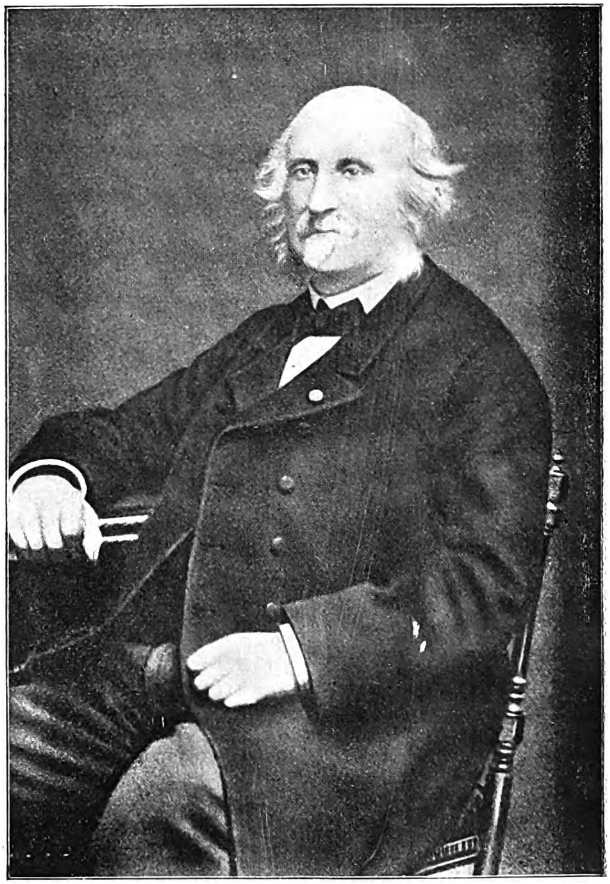
Jul. Grossmann

et

Herm. Grossmann

Deuxième volume

Gauthier-Villars
Quai des Grands-Augustins 55
Paris



EDOUARD PHILLIPS (1821-1889)

D'après une glyptographie d'Alfred Ditisheim, Bâle.

HORLOGERIE THÉORIQUE

Cours de Mécanique appliquée à la Chronométrie

PAR

JULES GROSSMANN
Ancien directeur de l'Ecole d'Horlogerie du Locle,

en collaboration avec son fils

HERMANN GROSSMANN
Directeur de l'Ecole de Mécanique et d'horlogerie de Neuchâtel.

Deuxième volume

ANNEXE

LES ACIERS AU NICKEL

ET

leurs Applications à l'Horlogerie

PAR

CH.-ÉD. GUILLAUME
Correspondant de l'Institut de France
Directeur-adjoint du Bureau international des poids et mesures.

BIENNE
E. MAGRON, ÉDITEUR

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
55, Quai des Grands-Augustins.

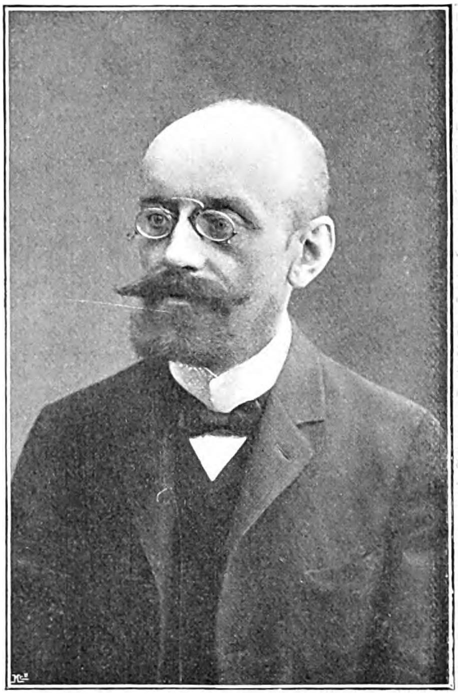
1912

Lausanne. — Imprimeries réunies, S. A.



JULES GROSSMANN ENTOURÉ DE SES ÉLÈVES

(Bas-relief du monument inauguré au Locle en 1911).



HERMANN GROSSMANN

Directeur de l'Ecole de Mécanique et d'Horlogerie,
à Neuchâtel.

CHAPITRE VII.

ÉCHAPPEMENT A CYLINDRE.

Description générale de l'échappement.

504. — L'échappement à cylindre, inventé vers l'année 1720, par l'horloger anglais Graham, rentre dans la catégorie des échappements à repos frottants. Les organes dont il se compose, sont au nombre de deux :

la roue d'échappement,
le cylindre.

505. — **La roue d'échappement** a ses dents relevées au-dessus de sa surface. En projetant ces dents sur un plan horizontal, on obtient une figure telle qu'elle est représentée fig. 135. Si *c* est la *pointe* d'une dent et *d* son *talon*, la surface projetée suivant la ligne *ced* sera la *surface d'impulsion* de cette dent. La roue se fait généralement en acier trempé ; les dents sont soutenues au-dessus du plan de la roue par de petites colonnes projetées horizontalement suivant *abi*.

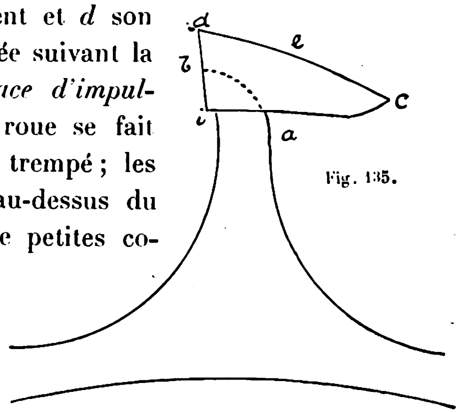


Fig. 135.

506.— Si l'on coupe le *cylindre* perpendiculairement à son axe par un plan passant par les points où se fait le contact des dents de la roue, on obtient une surface

qui est celle d'une couronne circulaire dont on aurait enlevé une partie (fig. 136), la partie enlevée étant plus petite que celle qui reste.

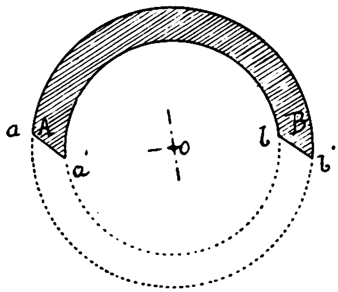


Fig. 136.

Les deux extrémités A et B se nomment les *lèvres* du cylindre et les lignes *aa'* et *bb'* sont la projection des surfaces d'impulsion.

Le cylindre porte le balancier concentriquement à son axe O. Les pivots sont formés dans deux pièces d'acier ajustées dans chacune des extrémités du cylindre ; ce sont les *tampons*.

Fonctionnement de l'échappement.

507. — Supposons le balancier au commencement de son oscillation, c'est-à-dire écarté d'un certain angle de sa position de repos ; admettons aussi qu'à partir de cette position il soit animé, sous l'action de la force du spiral, d'un mouvement à droite indiqué par la flèche (fig. 137). La pointe de la dent repose sur la surface extérieure du cylindre en produisant un frottement jusqu'à ce que le point *a* du cylindre vienne se présenter devant la pointe de la dent, qui devient alors libre, et la roue peut commencer à se mouvoir. En cet instant, le cylindre possède une vitesse que l'on peut évaluer et qui est un peu inférieure à la vi-

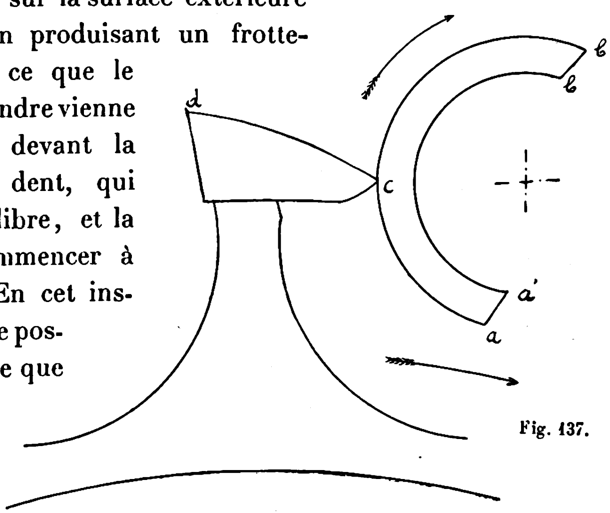


Fig. 137.

tesse maximum à laquelle il peut arriver pendant le parcours de son oscillation. La roue commence son mouvement avec une vitesse égale à zéro. Il y a donc un très petit instant pendant lequel elle n'est pas en contact avec le cylindre ; mais, la vitesse de la roue augmentant rapidement, la dent atteint la lèvre du cylindre. Il se produit alors un choc entre ces deux organes et ce choc a pour effet d'augmenter la vitesse du balancier. A partir de là, la surface d'impulsion de la roue commence à agir contre celle du cylindre (fig. 138) en augmentant la vitesse du balancier jusqu'à ce que le talon de la dent quitte le cylindre. La roue parcourt alors un angle de chute qui se termine par la rencontre de la pointe de la dent avec la surface intérieure du cylindre au point c (fig. 139). Le balancier, ayant reçu l'impulsion, continue son mouvement dans le même sens avec une vitesse qui diminue progressivement par suite du frottement de la dent contre le cylindre, de la résistance du spiral et des autres résistances passives. Le mouvement finit par s'éteindre et le spiral, agissant alors comme force active, imprime au balancier un mouvement

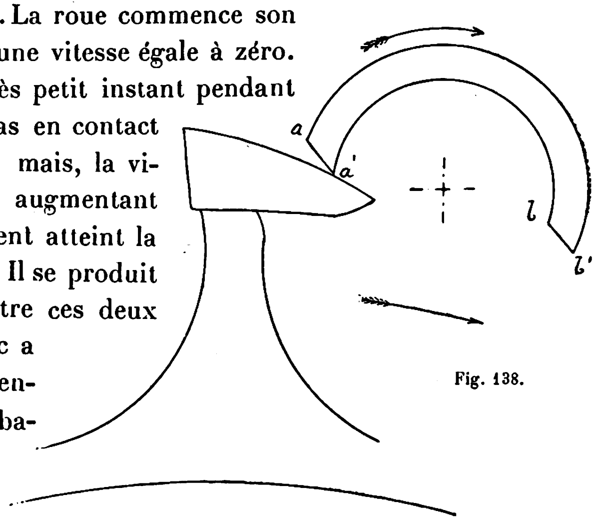


Fig. 138.

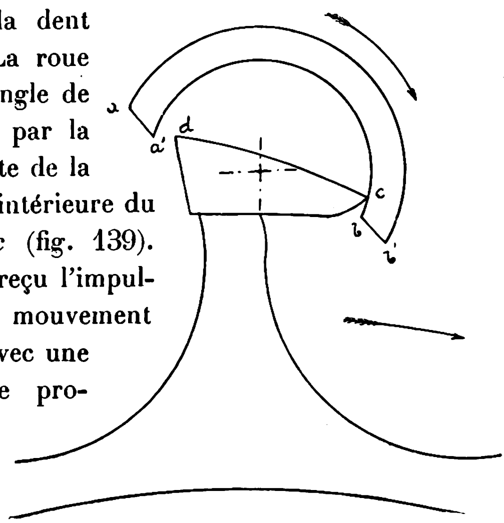


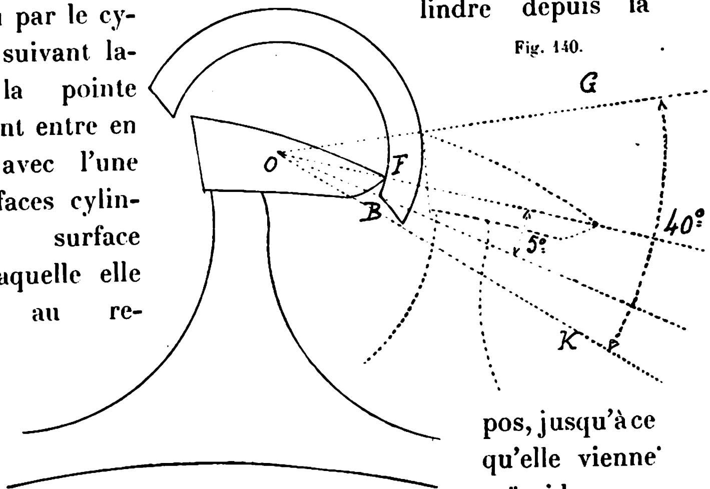
Fig. 139.

en sens contraire. Les mêmes fonctions se reproduisent ensuite à la lèvre de sortie du cylindre.

508. — **Angle d'impulsion.** — C'est l'angle que le balancier parcourt à partir de la position dans laquelle la pointe d'une dent commence à agir sur l'une des lèvres jusqu'à ce que le talon de cette dent quitte cette lèvre. Le plus généralement cet angle est de 35°.

509. — **Angle de repos.** — C'est l'angle FOB (fig. 140) parcouru par le cylindre depuis la position suivant laquelle la pointe d'une dent entre en contact avec l'une des surfaces cylindriques, surface contre laquelle elle demeure au repos, jusqu'à ce qu'elle vienne coïncider avec l'arête formée par l'intersection de la surface de repos et de la surface d'impulsion du cylindre. Pour apprécier la valeur de cet angle, il faut donc arrêter le mouvement du balancier à l'instant où la dent est entrée en contact au point F et le faire reculer jusqu'au point B. L'angle de repos doit être aussi faible que possible; en pratique, il ne peut cependant être réduit à zéro, à cause des ébats de pivots et des imperfections du taillage de la roue. Nous admettons sa valeur minimum égale à 5°. La longueur d'arc de 5° pour le cylindre d'une montre de 43 m/m n'est déjà que de 0,0485 m/m environ pour l'écorce extérieure (0,0348 m/m pour l'écorce intérieure).

Fig. 140.



510. — **Angle de levée.** — C'est l'angle KOG (fig. 140) que le balancier parcourt à partir de la position dans laquelle la

pointe d'une dent entre en contact avec le point de repos jusqu'à celle où cette dent termine l'impulsion. Pour observer cet angle, il faut donc également faire tourner le balancier en sens contraire du mouvement communiqué au cylindre par la roue d'échappement. L'angle de levée est en conséquence égal à la somme des angles de repos et d'impulsion, soit $35 + 5 = 40°$.

511. — **Chute.** — On appelle « chute » l'angle que la roue parcourt après avoir accompli l'impulsion jusqu'à ce que la pointe d'une dent rencontre une des surfaces de repos. Géométriquement, cet angle pourrait être égal à zéro, mais il ne peut en être ainsi dans la pratique. Les ébats des mobiles et les imperfections de l'exécution des organes, demandent toujours une légère chute. Des montres très soignées pourraient peut-être marcher avec un demi-degré de chute, mais nous admettrons pratiquement plutôt un degré pour cet angle. Remarquons encore que, pendant que la roue parcourt ce chemin, son travail est totalement perdu ; ainsi avec 1° de chute sur 12 parcourus par une roue de 15 dents, pendant une oscillation du balancier, il y aura $^1/_{12}$ de la force perdue.

Construction et détermination des dimensions des organes de l'échappement.

512. — Dans l'échappement à cylindre, la roue tourne toujours dans le même sens en agissant sur le cylindre qui accomplit son mouvement alternativement dans un sens et dans l'autre. Lorsque la roue agit sur la lèvre de sortie, le mouvement du cylindre a lieu en sens contraire de celui de la roue ; on peut donc assimiler cette fonction à celle d'un engrenage extérieur. Par contre, lorsque la dent agit sur la lèvre d'entrée, le mouvement a lieu dans le sens même de celui de la roue, comme dans les engrenages intérieurs.

Nous sommes ainsi conduits à appliquer les lois qui nous ont servi à déterminer les courbes de contact des engrenages, à condition que la courbe des dents de la roue d'échappement

soit choisie de manière à pouvoir remplir à la fois les conditions d'un engrenage extérieur à la levée de sortie et intérieur à la levée d'entrée. Si la distance des centres est connue, la première opération consiste à déterminer les rayons des circonférences primitives, différentes pour l'engrenage extérieur et pour l'engrenage intérieur, au moyen des formules (199).

$$r = D \frac{\alpha'}{\alpha + \alpha'} \text{ et } r' = D \frac{\alpha}{\alpha + \alpha'}$$

$$r = D \frac{\alpha}{\alpha - \alpha'} \text{ et } r' = D \frac{\alpha}{\alpha - \alpha'}$$

dans lesquelles

$\alpha =$ angle parcouru par la roue,
$\alpha' =$ angle parcouru par le cylindre,
$D =$ distance des centres.

Cependant l'analyse de cette construction, par la théorie rigoureuse, conduit à des impossibilités pratiques qui se résument en ce qu'une même courbe de dent ne peut conduire uniformément les deux lèvres du cylindre ; en outre, l'angle parcouru par la roue est plus grand lorsque la dent agit sur la lèvre d'entrée, et plus petit lorsqu'elle agit sur la lèvre de sortie. Nous sommes ainsi obligés de faire abstraction de toute théorie rigoureuse et de nous borner à la recherche des dimensions des mobiles. Du reste, en faisant une construction graphique à grande échelle, on s'aperçoit à peine de la différence des deux courbes de la dent, qui devraient être en arc de spirale d'Archimède ou mieux encore en développante de cercle. On peut les remplacer par un arc de cercle de rayon égal à la distance des centres.

513. — Si la roue d'échappement a 15 dents, chaque dent accompagnée d'un vide embrasse un angle de

$$\frac{360^\circ}{15} = 24^\circ.$$

Ces 24° doivent donc être divisés en deux parties : l'une occcupée par le plein de la dent, l'autre par le vide. Si l'on partage cet angle en deux parties égales, l'écorce du cylindre

se réduit à une simple circonférence, sans épaisseur. Par contre, si l'on réduisait l'angle occupé par le plein de la dent autant que la pratique le permet, on obtiendrait l'échappement à virgule.

Afin de réaliser pour cette écorce une épaisseur suffisante, il faudra diminuer la partie pleine du « pas » et augmenter d'autant le vide. Ainsi, en divisant le pas en 20 parties, nous pourrions en prendre 9 pour la dent et 11 pour le vide.

La dent de la roue étant embrassée par l'angle compris entre les droites qui joignent le centre de la roue, d'un côté au talon et de l'autre à la pointe, cet angle sera alors

$$^{9}/_{20} \times 24^{\circ} = 10^{\circ}\, 48'.$$

Le vide est formé par l'angle compris entre les lignes qui joignent le centre de la roue à la pointe d'une dent et au talon de la suivante ; cet angle sera par suite :

$$^{11}/_{20} \times 24^{\circ} = 13^{\circ}\, 12'.$$

La chute sera comprise dans ce dernier angle.

Une première difficulté réside dans la détermination de l'angle formé par la droite réunissant la pointe au talon de la dent avec la perpendiculaire au rayon de la roue passant par le milieu de cette droite.

Admettons que cet angle varie, par rapport à l'angle d'impulsion du cylindre, dans la même proportion que l'angle occupé par la partie pleine de la dent par rapport à l'angle total embrassant le pas de la roue d'échappement. Ainsi, pour le cas qui nous occupe, nous aurions pour valeur de cet angle :

$$^{9}/_{20} \times 35^{\circ} = 15^{\circ}\, 45'.$$

514. — Avec les données qui précèdent, il ne sera pas difficile de trouver un procédé graphique permettant de déterminer d'une manière approximative les divers éléments de l'échappement, soit les rayons intérieur et extérieur du cylindre, et les rayons de la roue aboutissant au talon et à la pointe de la dent.

Nous commencerons par déterminer ces diverses valeurs au moyen du calcul, en prenant la distance des centres égale

à l'unité de façon à obtenir directement les « modules » de construction.

515. — **Rayon intérieur du cylindre.** — Supposons d'abord que la dent occupe entièrement l'intérieur du cylindre, en faisant ainsi abstraction de la chute; nous aurons (fig. 141)

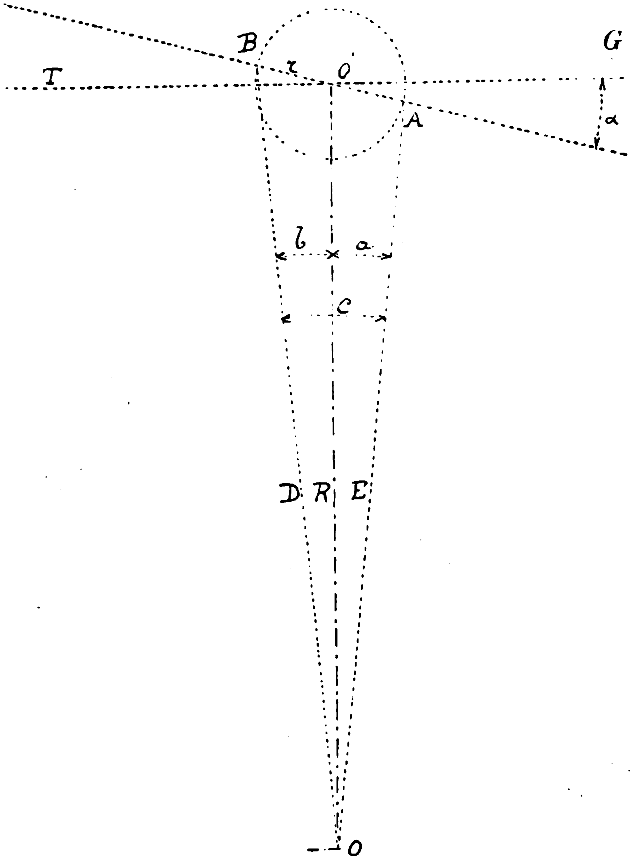


Fig. 141.

l'angle AOB $= c = 10°48'$ et le rayon intérieur du cylindre O'A = O'B = r.

Soit encore :

BO $= D =$ distance du centre de la roue au talon de la dent ;

OO' $= R =$ distance des centres ;

AO $= E =$ distance du centre de la roue à la pointe de la dent ;

$$< \mathrm{BO'T} = < \mathrm{GO'A} = 15^{\circ}\, 45' = \alpha.$$

Dans le triangle BOA, nous connaissons l'angle c ; dans le triangle O'OA, nous connaissons l'un des côtés R et l'angle $\mathrm{AO'O} = 90^{\circ} - \alpha$ et, dans le triangle O'OB, nous connaissons le côté R et l'angle $\mathrm{BO'O} = 90^{\circ} + \alpha$. Au surplus, nous savons que $\mathrm{BO'} = \mathrm{AO'} = r$ et que la somme des angles $\mathrm{BOO'} = b$ et $\mathrm{AOO'} = a$ est égale à c.

Nous pouvons poser :

$$\frac{r}{D} = \frac{\sin(c - a)}{\cos \alpha} \text{ et } \frac{r}{E} = \frac{\sin a}{\cos \alpha},$$

D'où l'on tire

$$D = \frac{r, \cos \alpha}{\sin(c - a)} \text{ et } E = \frac{r.\cos \alpha}{\sin a}.$$

Nous avons en outre

$$D.\cos(c - a) = R + r.\sin \alpha$$

et

$$E.\cos a = R - r.\sin \alpha.$$

Remplaçant D et E dans ces dernières formules par leurs valeurs trouvées plus haut, on obtiendra

$$(1)\ \frac{r.\cos \alpha.\cos(c - a)}{\sin(c - a)} = \frac{r.\cos \alpha}{\operatorname{tg}(c - a)} = R + r \sin \alpha,$$

$$(2)\ \frac{r.\cos \alpha.\cos a}{\sin a} = \frac{r.\cos \alpha}{\operatorname{tang} a} = R - r \sin \alpha \text{ ;}$$

de la dernière égalité on tirera

$$(3) \qquad \operatorname{tang} a = \frac{r.\cos \alpha}{R - r \sin \alpha}.$$

Remplaçons dans l'équation (1) tang $(c - a)$ par la valeur de cette différence ; on aura

$$\frac{r.\cos \alpha}{\dfrac{\operatorname{tg}.c - \operatorname{tg}.a}{1 + \operatorname{tg}.c.\operatorname{tg}.a}} = \frac{r.\cos \alpha + r.\cos \alpha \operatorname{tg}.c.\operatorname{tg}.a}{\operatorname{tg}.c - \operatorname{tg}.a} = R + r \sin \alpha.$$

Substituons pour tang.a sa valeur de (3)

$$\frac{r.\cos\alpha + r\cos\alpha.\ \text{tg}\ c\dfrac{r.\cos\alpha}{R - r\sin\alpha}}{\text{tang.}\ c - \dfrac{r.\cos\alpha}{R - r\sin\alpha}} = R + r\sin\alpha,$$

ou, en réduisant et simplifiant,

$$2\,R\,r\cos\alpha + r^2\ \text{tang.}\ c - R^2\ \text{tang.}\ c = 0$$

$$\text{et}\quad r^2 + \frac{2\,R\cos\alpha}{\text{tg.}\ c}r - R^2 = 0,$$

d'où l'on tire

(4)

$$r = -\frac{R\cos\alpha}{\text{tang}\ c} \pm \sqrt{\frac{R^2\cos^2\alpha}{\text{tang.}^2\ c} + R^2} = R\frac{-\cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - \text{tg}^2 c}}{\text{tang.}\ c}$$

Le calcul numérique donne en prenant $R = 1$:
$\alpha = 15^\circ\ 45'$ et $c = 10^\circ\ 48'$,

$$r = 0{,}09815,$$

516. — L'équation (3) donne la valeur de l'angle a et l'on obtient par le calcul

$$a = 5^\circ\ 32'\ 35''.$$

L'angle b sera par suite

$$b = c - a = 10^\circ\ 48' - 5^\circ\ 32'\ 35'' = 5^\circ\ 15'\ 25''.$$

517. — La valeur de E sera donnée par

$$E = r\frac{\cos\alpha}{\sin a},$$

d'où l'on tire

$$E = 0{,}97796$$

518. — La valeur de D sera donnée par

$$D = r\frac{\cos\alpha}{\sin b},$$

d'où, calcul fait,

$$D = 1{,}03125.$$

519. — **Rayon extérieur du cylindre.** — Le diamètre extérieur $2r'$ du cylindre est égal à la distance qui sépare la pointe d'une dent au talon de la suivante (en faisant abstraction de la chute).

On posera pour le triangle, dans lequel les 2 côtés D et E sont connus ainsi que l'angle adjacent,

$$24^\circ - c = 24^\circ - 10^\circ.48' = 13^\circ 12',$$
$$2\,r' = \sqrt{D^2 + E^2 - 2DE.\ \cos\,(24^\circ - c)}.$$

Le calcul donne

$$r' = 0{,}118456.$$

520. — **Angle parcouru par la roue pendant son action sur la lèvre d'entrée du cylindre.** — Il est facile de constater que la roue ne parcourt pas le même angle lorsqu'elle donne l'impul-

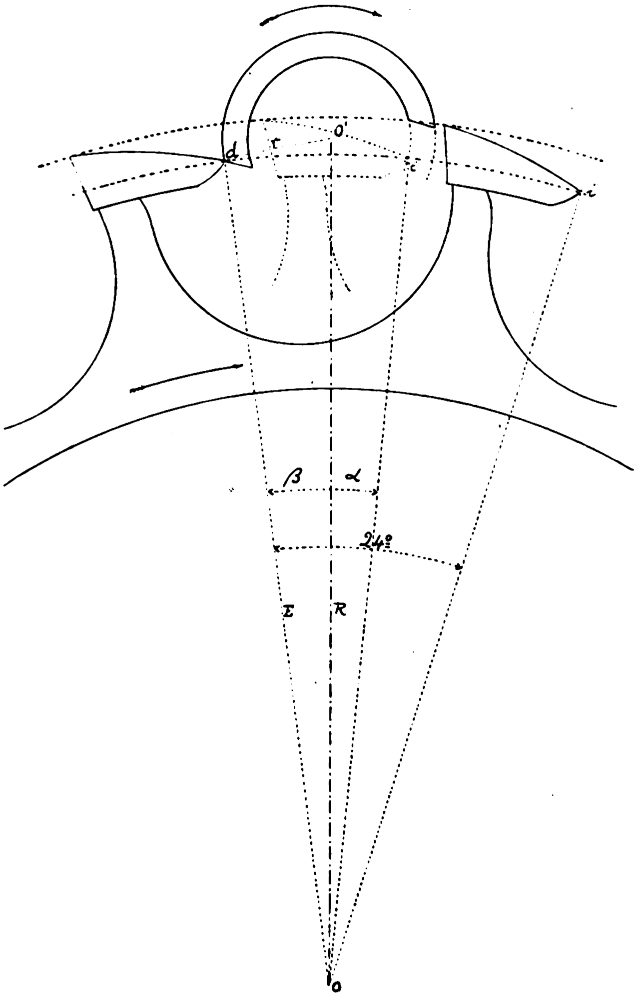


Fig. 142.

sion à la lèvre d'entrée du cylindre que lorsqu'elle actionne la lèvre de sortie. Proposons-nous, à l'aide des données précédentes, de déterminer la valeur de cet angle pendant l'action sur la lèvre d'entrée (fig. 142).

La roue devra parcourir l'angle *doe* égal à la somme des angles $dOO' = \beta$ et $O'Oe = a$. Ce dernier angle nous est connu (516).

Dans le triangle dOO', nous connaissons les trois côtés $dO = E$, $OO' = R$ et $O'd = r'$, et nous pourrons poser

$$\cos dOO' = \frac{E^2 + R^2 - r^2}{2ER}$$

Le calcul donne

$$\beta = d\,OO' = 6° \, 44' \, 55''$$

En ajoutant à cet angle la valeur de l'angle a, on aura pour l'angle parcouru par la roue pendant son action sur la lèvre d'entrée :

$$\beta + a = 6° \, 44' \, 55'' + 5° \, 32' \, 35'' = 12° \, 17' \, 30''.$$

521. — **Angle parcouru par la roue pendant son action sur la lèvre de sortie.** — Cet angle peut être simplement déterminé en retranchant de 24° la valeur de $\beta + a$; donc

$$24° - 12° \, 17' \, 30'' = 11° \, 42' \, 30''.$$

522. — Admettons maintenant que, pendant que la roue parcourt 11° 30', le cylindre parcoure 35°, ce qui nous donnera $\frac{1}{2}$ degré de chute.

Nous savons que la roue ne parcourt pas exactement 11°30' à chaque impulsion ; cet angle est plus grand pendant l'action sur la lèvre d'entrée et plus faible pendant que la dent agit sur la lèvre de sortie. La valeur moyenne de ces deux angles reste cependant égale à 11° 30'. Prenons encore la distance des centres R = 1, l'angle occupé par le plein de la dent égal à 14° et l'angle occupé par le vide égal à 10°.

L'angle α devra être, par suite de l'adoption de ces dernières valeurs,

$$\alpha = \frac{10}{23} \times 35° = 15° \, 13'.$$

Le calcul de l'équation (4) donnera

$$r = 0{,}090\ 6214\ ;$$

cette valeur représente la demi-distance de la pointe de la dent au talon.

Le rayon intérieur du cylindre doit être à peu près d'un arc d'un quart de degré plus grand, soit de 0,0043633; donc

$$r = 0{,}095 \text{ en chiffre rond.}$$

523. — La valeur de l'angle a s'obtiendra par le calcul de l'équation (3), qui donnera

$$a = 5^o 7' 2'',7\ ;$$

et l'angle b sera

$$b = c - a = 10^o - 5^o 7' 2'',\ 7 = 4^o 52' 57'',3.$$

524. — Nous aurons par suite

$$E = \frac{r.\ \cos \alpha}{\sin a} = 0{,}98035$$

et

$$D = \frac{r.\ \cos \alpha}{\sin b} = 1{,}02738.$$

525. — La distance entre la pointe d'une dent et le talon de la dent suivante s'obtiendra par l'équation

$$2\ r' = \sqrt{D^2 + E^2 - 2\ D\ E \cos 14^o} = 0{,}249\ D$$

et $r' = 0{,}1245.$

Le rayon extérieur du cylindre r' devra être égal à 0,1245 diminué de l'arc de chute, soit en chiffre rond $r' = 0{,}12$.

Tracé de l'échappement à cylindre.

526. — Les données qui précèdent permettent de représenter facilement l'échappement à cylindre et la planche 14 peut être établie suivant ces valeurs.

La distance des centres R est égale à $150^m/_m$, ce qui donne la longueur du rayon aboutissant à la pointe des dents,

$$E = 150 \times 0{,}98035 = 147{,}05^m/_m\ ;$$

le rayon aboutissant au talon des dents,

$$D = 150 \times 1{,}02738 = 154{,}1^m/_m\ ;$$

le rayon intérieur du cylindre,

$$r = 150 \times 0{,}095 = 14{,}25^{m}/_{m}\ ;$$

le rayon extérieur du cylindre,

$$r', = 150 \times 0{,}12 = 18^{m}/_{m}.$$

La chute a été admise égale à un demi-degré.

Il reste à déterminer la forme des dents de la roue et des lèvres du cylindre.

Pour déterminer ces courbes, il faudrait calculer les circonférences primitives de la roue et du cylindre (512) et rechercher, par les méthodes établies dans l'étude des engrenages, les formes satisfaisant à la transmission uniforme de la force, aussi bien pendant le transport par la lèvre d'entrée (engrenage intérieur) que pendant le transport par la lèvre de sortie (engrenage extérieur). Nous avons dit qu'en opérant cette construction on trouvera pour courbe de la dent une courbe différente, suivant qu'elle agisse sur la lèvre d'entrée ou sur la lèvre de sortie. On peut admettre, comme moyenne entre les deux formes déterminées, un arc de spirale d'Archimède. De même pour la courbe déterminant la surface frottante de la lèvre d'entrée, qui pourra encore être l'arc d'une spirale analogue, tandis qu'à la lèvre de sortie une ligne droite remplira mieux le but pratiquement.

527. — **Méthode graphique.** — On peut, d'une manière très suffisante pour la pratique, établir graphiquement les dimensions de l'échappement à cylindre de la manière suivante.

Soit donnée la distance des centres de $150^{m}/_{m}$, la roue ayant 15 dents, l'angle de levée du balancier de 40° et l'angle de repos de 5°. Du centre O′ du cylindre (fig. 143), on élève sur la ligne des centres OO′ une perpendiculaire TG et on reporte l'angle MO′T de 15° 45′, la ligne droite MO′ étant prolongée suivant MN. La circonférence intérieure du cylindre comprend l'angle occupé par la dent, plus la chute que nous admettons d'un demi-degré, soit un angle total de 10° 30′. Portons la moitié de cet angle, soit 5° 15′, suivant O′OA et faisons passer par le point d'intersection A de la ligne

droite OA avec MN une circonférence qui représentera l'écorce intérieure du cylindre. Cette circonférence coupe O'M

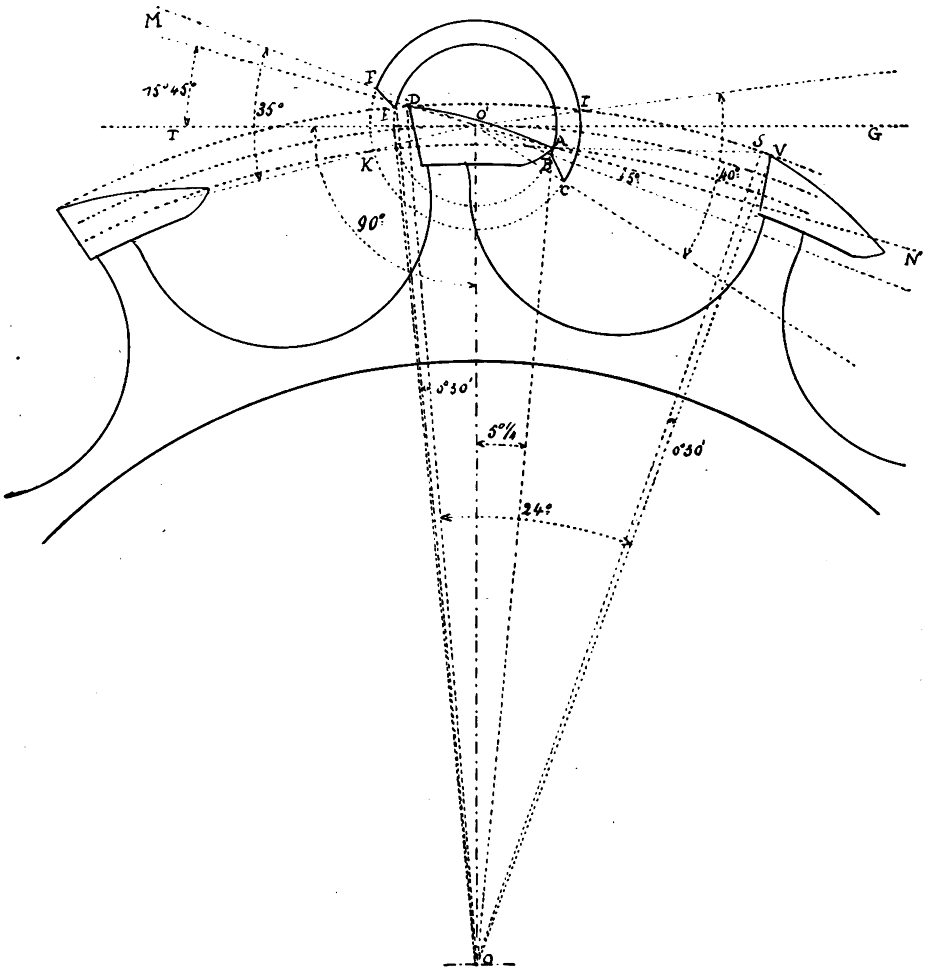


Fig. 143

en un point E, que nous joindrons par une droite au centre O de la roue ; on porte l'angle de chute EOD de 0° 30'. Par le point D, obtenu par l'intersection des droites OD et O'M, on tire, du point O comme centre, la circonférence passant par le talon des dents de la roue et, par le point A, la circonférence passant par la pointe des dents. L'écorce exté-

rieure du cylindre s'obtient en portant les angles DOV de 24° et SOV de 0° 30′ (chute extérieure). On joint le point A au point S par une droite qui est le diamètre extérieur du cylindre et on décrit cette circonférence du point O′ comme centre. On peut alors tracer la roue en observant les meilleures conditions de légèreté pratiquement possibles et il ne reste plus qu'à couper le cylindre.

Pour cela on porte l'angle de repos AO′B égal à 5°, le point B sera un point de la lèvre de sortie. On joint ensuite le point I au centre O′ et on porte l'angle IO′C de 40°. On obtient ainsi le point C qui, relié par une droite au point B, donne la projection de la surface d'impulsion de la lèvre de sortie du cylindre. Le point E est un point de la lèvre d'entrée ; pour en obtenir un deuxième point F, on joint le point de repos extérieur K au centre O′ et on porte l'angle KO'F de 35° ; le côté O′F de cet angle donne, par son intersection avec la circonférence extérieure du cylindre, le point F qui sera relié au point E par une ligne de forme légèrement convexe. Le cylindre est ainsi déterminé.

Nous avons fait remarquer que la forme de la surface agissante de la dent devait être légèrement convexe (526) ; cette forme est préférable à la ligne droite AD, aussi pour la raison que la roue, à cause de l'inertie, ne se met pas immédiatement en mouvement à l'instant du dégagement : la dent doit ainsi rattraper le cylindre. Si la dent est construite avec une surface d'impulsion courbe, la roue atteint plus vite le cylindre que si cette surface était plane et il y aura par suite moins de force perdue.

528. — Comme l'angle parcouru par la roue, lorsqu'elle donne l'impulsion à la lèvre d'entrée, est différent de celui qu'elle parcourt pendant l'impulsion à la lèvre de sortie (520, 521), on peut se demander s'il serait utile que l'angle d'impulsion du cylindre pour la lèvre d'entrée fût différent de l'angle d'impulsion à la lèvre de sortie, c'est-à-dire que ces angles fussent proportionnels aux angles alternativement parcourus par la roue. Nous croyons que cela importe peu, car

il est impossible dans cet échappement de suivre rigoureusement la théorie : aussi nous bornons-nous seulement à indiquer le problème. Après avoir constaté ainsi qu'en bien des points de ce système la théorie ne peut être rigoureusement satisfaite, nous ne serons pas surpris que les praticiens ne soient pas toujours d'accord eux-mêmes au sujet de la construction de cet échappement. Il faut donc laisser le dernier mot à la pratique et l'on pourra remarquer, en examinant un cylindre qui a marché pendant plusieurs années, qu'il se trouve toujours, en un point quelconque, une usure indiquant un défaut dans la construction des courbes de contact. Pour pallier à cette usure, on fabriquait autrefois des cylindres en rubis ; mais la difficulté du travail et par suite son prix élevé ont fait abandonner ce système. On a fait mieux encore en le remplaçant par un mécanisme plus parfait : l'échappement à ancre.

529. — **Flèche du cylindre.** — Nous emploierons ici le mot « flèche » par analogie et entendrons par ce vocable la plus longue perpendiculaire abaissée de la circonférence extérieure sur la droite LG (fig. 144) passant par les points extrêmes des deux lèvres du cylindre.

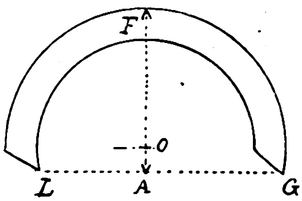


Fig. 144.

Dans les constructions que nous avons étudiées, le rapport entre le diamètre extérieur du cylindre et cette « flèche » a pour valeur

$$0{,}554 = 5/9.$$

Le diamètre extérieur du cylindre étant 9, sa « flèche » devra par conséquent être égale à 5.

530. — Pour mesurer pratiquement le rapport du diamètre extérieur du cylindre à la « flèche » de l'ouverture, on a construit un instrument, nommé *filière aux cylindres*, que nous allons décrire rapidement.

Cet instrument est formé de trois règles d'acier divisées et réunies à leurs extrémités par des traverses goupillées lais-

sant entre elles deux vides ou rainures *a* et *b* (fig. 145). La proportion de l'écartement est la même sur toute la longueur:

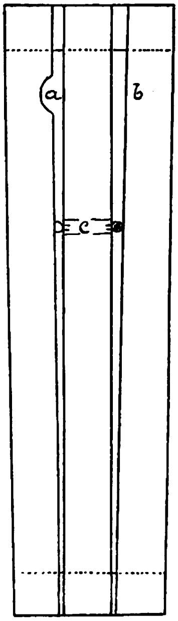


Fig. 145.

c'est donc dire que, la largeur de la grande rainure *b* représentant le diamètre d'un cylindre introduit entre ses deux côtés, le numéro correspondant de la petite rainure *a* donne la flèche de l'ouverture.

Si *c* est, par exemple, la division à laquelle s'est arrêté le cylindre dans la rainure *b*, ce même cylindre, introduit par sa partie encochée dans la rainure *a*, s'arrêtera également à la même division, s'il est exact.

531. — **Données pratiques.** — Indiquons encore pour mémoire, en déduction des calculs et tracés précédents les données suivantes applicables au dessin et à la pratique.

La distance des centres étant 1,

le rayon extérieur de la roue sera

1,0274,

le rayon de la circonférence passant par la *pointe des dents*

0,98,

le rayon extérieur du cylindre

0,12,

le rayon intérieur du cylindre

0,095.

Le diamètre extérieur de la roue étant 1,

le diamètre extérieur du cylindre sera

0,1155.

En plaçant la roue d'échappement dans le compas de proportion à la division 100, le cylindre devra se placer à la division

11,55.

Le diamètre extérieur du cylindre étant 1, la flèche de l'ouverture devra être

5/9.

Du renversement du balancier.

532. — Le balancier d'une montre à cylindre peut parcourir un tour presque complet. Si l'on voulait lui faire décrire de plus grands arcs, il arriverait qu'en tournant de la droite vers la gauche le fond de la petite coche du cylindre viendrait heurter le bras qui soutient la dent, et cette dent, débordant alors sur la lèvre du cylindre, viendrait s'accrocher dessus, le retiendrait immobile et l'empêcherait ainsi d'être ramené en arrière par la force du spiral. C'est ce qu'on appelle le *renversement*. — La même chose aurait également lieu si le cylindre décrivait un arc trop grand en sens inverse, en tournant de la gauche vers la droite ; la dent, n'étant plus appuyée sur la surface du repos, tomberait dans l'intérieur du cylindre ; le bras qui soutient la dent se jetterait contre le fond de la petite coche et, lorsque le cylindre serait ramené par le spiral, il viendrait s'arcbouter contre la dent avec laquelle il demeurerait également en prise.

On évite le renversement en plaçant à des points convenablement choisis un « plot » au coq et une fine « goupille » au balancier, ces accessoires étant de simples pièces d'arrêt du mouvement. Lorsque le balancier est au repos, la goupille qu'il porte doit se trouver exactement à l'opposé et parfaitement en face du « plot » de renversement du coq.

On peut s'assurer exactement de la position correcte de ces organes en plaçant entre le balancier et le coq une mince feuille de papier pliée en deux, de façon à gêner le mouvement du balancier. On le fait alors tourner lentement à l'aide d'une cheville de bois d'un côté et de l'autre jusqu'à ce que la goupille vienne s'appuyer contre le « plot ». Si le mouvement peut s'accomplir sans que l'un des défauts ci-dessus s'y révèle, tout est bien à sa place ; mais, s'il y a renversement, si la dent arrive trop au bord d'une des lèvres du cylindre, ou si la roue prend un léger mouvement de recul quand la

goupille approche du plot, le déplacement de celle-ci devient alors nécessaire.

Il est évident que cette limitation de l'arc d'oscillation du balancier ne doit fonctionner que lorsque la montre reçoit une secousse extérieure ayant pour conséquence d'augmenter cet arc. En temps ordinaire, le contact des organes de renversement ne doit pas avoir lieu et l'amplitude des oscillations doit être inférieure à un tour.

Des frottements dans l'échappement à cylindre.

533. — Une théorie analogue à celle que nous avons employée pour le calcul de la force de frottement dans les engrenages (348) et les échappements à ancre (467) peut conduire à la détermination de cette force dans l'échappement à cylindre. Pour les principes généraux, on les trouvera établis dans le chapitre que nous avons consacré au frottement (336).

534. — Pendant le repos de la roue d'échappement, la dent étant appuyée contre l'une ou l'autre des écorces du cylindre, le balancier est animé d'un mouvement dans les deux sens. En considérant d'abord le cas du repos sur l'écorce extérieure (fig. 146), on constate que la force qui sollicite la roue, manifeste son action par une pression N dirigée sur le centre O′ du cylindre. Son intensité conserve la même valeur pendant l'aller et le retour du balancier. La force du frottement conservera par suite une même valeur fN pendant ces deux périodes de mouvement. Seul l'effet produit par cette dernière force sera différent suivant que le balancier sera animé d'un mouvement dans le sens de la flèche (1) ou dans le sens de la flèche (2); ceci se comprend en considérant que la force qui anime le balancier, change de sens dès la fin de l'oscillation. Si nous conservons pour F le signe positif, dans un cas comme dans l'autre, le frottement devra, lui alors, changer de signe dans l'équation de l'équilibre de la roue et être alternativement négatif et positif. Il ne faut pas perdre de vue

que le moment de force F représente le poids qu'il faudrait suspendre à l'unité de distance de l'axe du cylindre pour mettre celui-ci à l'état d'équilibre instable. F ne représente donc pas la force qui anime le balancier, mais le moment de celle qu'il doit dépenser pour mettre le cylindre en mouvement.

C'est à ce fait seul que doit être attribuée la différence que nous constaterons dans les valeurs de F_1 et de F_2 (fig. 146).

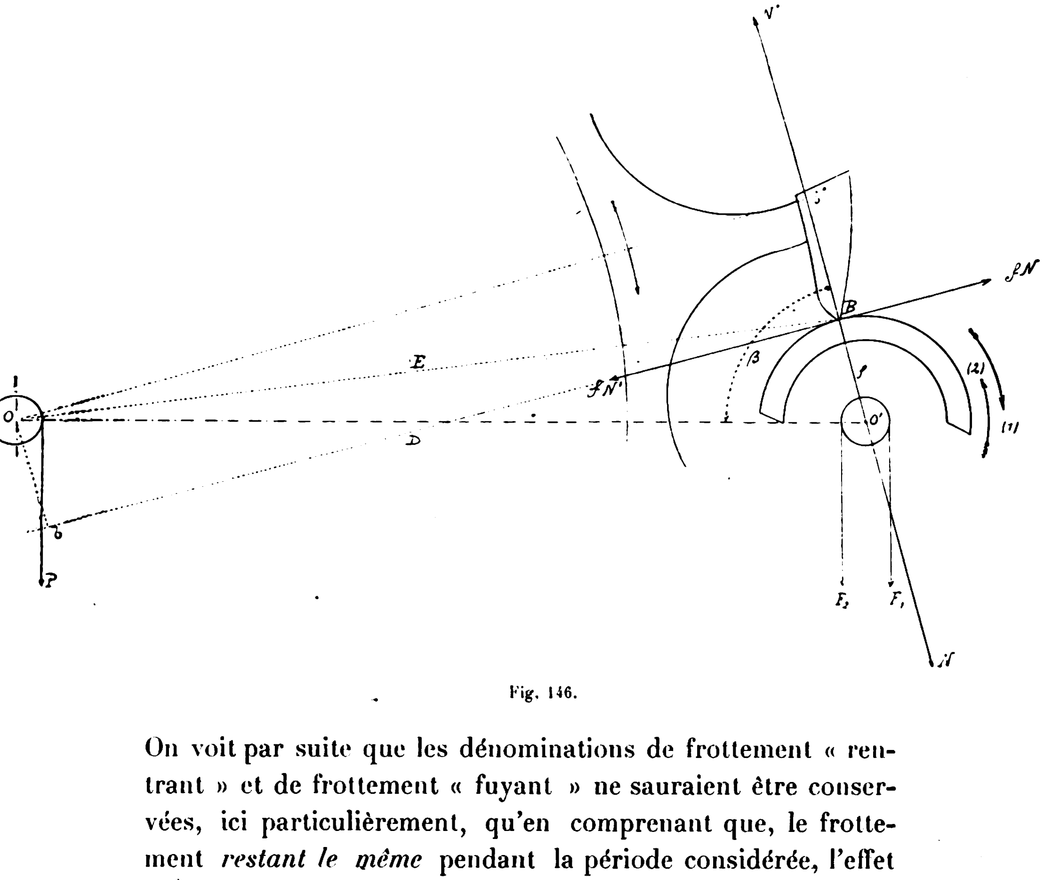


Fig. 146.

On voit par suite que les dénominations de frottement « rentrant » et de frottement « fuyant » ne sauraient être conservées, ici particulièrement, qu'en comprenant que, le frottement *restant le même* pendant la période considérée, l'effet de cette force seul varie. Pour éviter toute ambiguïté, nous nous abstiendrons plutôt de ces dénominations.

535. — **1° Repos sur l'écorce extérieure.** — Ce cas présente donc les deux alternatives du mouvement du balancier sui-

vant les flèches (1) et (2). Nous examinerons les deux cas séparément.

a) Premier mouvement (flèche 1). Soit O le centre de la roue et O′ celui du cylindre (fig. 146), B le point où la dent fait repos sur le cylindre. Par suite de l'équilibre, la somme algébrique des forces agissant sur l'un et l'autre mobiles doit être égale à zéro. On aura donc, par rapport au centre de la roue,

$$P - N'.Ob' - fN.Ob = 0$$

et, par rapport au centre du cylindre,

$$F_1 - fN'.\varrho = 0,$$

en désignant par ϱ le rayon extérieur du cylindre, qui est en même temps le bras de levier de la force du frottement, et en remarquant que le moment de la pression normale s'annule par rapport au centre O′, le bras de levier étant zéro. Si nous représentons par β l'angle formé par la normale et la ligne des centres, et par D la distance des centres, les équations ci-dessus deviendront

$$P - N'.D \sin\beta - fN(D.\cos\beta - \varrho) = 0,$$
$$F_1 - fN'\varrho = 0.$$

En divisant ces égalités l'une par l'autre, transposant les termes et remarquant que $N = N'$, on obtient

$$\frac{P}{F_1} = \frac{D \sin\beta + f(D\cos\beta - \varrho)}{f\varrho},$$

d'où l'on tire

$$(1) \qquad F_1 = \frac{Pf\varrho}{D\sin\beta + f(D\cos\beta - \varrho)}.$$

b) Second mouvement (flèche 2) — Dans ce sens nous aurons, par rapport au centre de la roue,

$$P - N'D\sin\beta + fN(D\cos\beta - \varrho) = 0,$$
$$F_2 - fN.\varrho = 0.$$

D'où, en divisant, transposant et simplifiant comme ci-dessus,

$$\frac{P}{F_2} = \frac{D\sin\beta - fN(D\cos\beta - \varrho)}{f\varrho}$$

et

$$(2) \qquad F_2 = \frac{P f \varrho}{D \sin \beta - f (D \cos \beta - \varrho)}.$$

Pour calculer l'angle β, nous connaissons dans le triangle OBO' les côtés $OO' = D$, $OB = E$ et $O'B = \varrho$; nous aurons, d'après la formule générale,

$$\sin \frac{1}{2} \beta = \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{b\,c}},$$

dans laquelle

$$p = \frac{a+b+c}{2};$$

on aura donc

$$\sin \frac{1}{2} \beta = \sqrt{\frac{\left(\frac{(D+E+\varrho)}{2} - D\right)\left(\frac{(D+E+\varrho)}{2} - \varrho\right)}{D\varrho}}$$

Soit $D = 1$, $E = 0{,}98$, $\varrho = 0{,}12$, le calcul donnera

$$\frac{1}{2}\beta = 38^\circ\, 34'\, 55''$$

et

$$\beta = 77^\circ\, 9'\, 50''.$$

536. — Remarquons que, si l'angle β devenait égal à 90°, c'est-à-dire si le point de repos de la dent se trouvait sur une perpendiculaire élevée par le point O sur la ligne des centres, les formules (1) et (2) deviendraient

$$F_1 = \frac{P f \varrho}{D - f \varrho} \quad \text{et} \quad F_2 = \frac{P f \varrho}{D + f \varrho}.$$

On peut ainsi constater que les deux forces F_1 et F_2 ne pourraient être équivalentes que si le rayon ϱ devenait zéro ou si la distance des centres D devenait égale à l'infini, ce qui aurait lieu, dans ce dernier cas, si la roue d'échappement était une crémaillère droite. Ces questions sont évidemment illusoires dans la pratique.

537. — **Calcul numérique des équations** (1) et (2). — Soit $P = 1$, $D = 1$, $f = 0{,}15$, $\varrho = 0{,}12$, $\beta = 77^\circ\, 9'\, 50''$.

La formule (1) nous donnera alors

$$F_1 = \frac{0{,}15 \times 0{,}12}{0{,}97501 + 0{,}15\,(0{,}22216 - 0{,}12)},$$

et, calcul fait,

$$F_1 = 0,018175 \text{ pour } P = 1 \text{ gr.}$$

La formule (2) donnera ensuite

$$F_2 = \frac{0,15 \times 0,12}{0,97501 - 0,15\,(0,22216 - 0,12)},$$

d'où, après calcul fait,

$$F_2 = 0,018677 \text{ pour } P = 1 \text{ gr.}$$

538. — 2° **Repos dans l'intérieur du cylindre..** — Désignons par ϱ' le rayon intérieur du cylindre, nous aurons, par un calcul semblable au précédent, les deux cas du mouvement du cylindre suivant les flèches (1) et (2), (fig. 147).

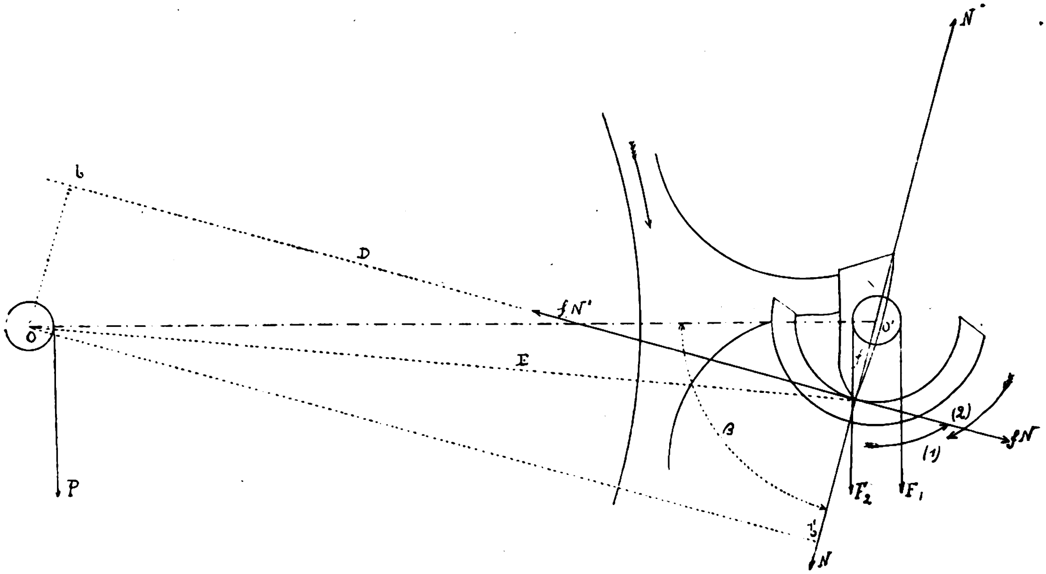
a) *Premier mouvement* (flèche 1). — Nous avons les deux formules de l'équilibre :

$$P - N' \, D \sin \beta - f \, N' \, (D. \cos \beta - \varrho') = 0,$$

$$F_1 - f \, N \, \varrho' = 0$$

En divisant ces égalités l'une par l'autre et simplifiant, on obtient

$$\frac{P}{F_1} = \frac{D \sin \beta + f \,(D \cos \beta - \varrho')}{f \, \varrho'},$$



Figt 147

d'où

$$(3) \qquad F_1 = \frac{P f \varrho'}{D \sin \beta + f (D \cos \beta - \varrho')}.$$

b) Second mouvement (flèche 2). — Un raisonnement analogue aux précédents conduit pour F_2 à la valeur

$$(4) \qquad F_2 = \frac{P f \varrho'}{D \sin \beta - f (D \cos \beta - \varrho')}.$$

539. — **Résultats numériques des formules** (3) et (4). — Nous avons ici les mêmes données que précédemment, sauf que

$$\varrho' = 0{,}095.$$

Le calcul de l'angle β nous donnera ici la valeur

$$\beta = 75^\circ \, 23' \, 4''.$$

Les valeurs F_1 et F_2 déduites des équations (3) et (4) seront par suite

$$F_1 = 0{,}014376 \text{ et } F_2 = 0{,}015094 \text{ gr.}$$

La comparaison des quatre valeurs de F est intéressante et les conclusions sont faciles à tirer.

Du frottement dans l'échappement Graham.

540. — L'échappement Graham présente une certaine analogie avec l'échappement à cylindre ; comme ce dernier, il rentre dans la catégorie des échappements à repos frottants et nous ne sortirons pas de notre sujet en étudiant ce cas spécial au point de vue de la force absorbée par le frottement des dents au repos contre les leviers de l'ancre. Ce système a été représenté planche 8.

Prenons ici le cas des repos équidistants, l'ancre embrassant $7\frac{1}{2}$ dents (Fig. 148) d'une roue de 30 dents. L'angle β sera de 45°, de même que l'angle O'OB.

Le rayon ϱ est égal à R et la distance des centres

$$D = R\sqrt{2}.$$

La somme algébrique du moment des forces agissant sur la roue est, flèches (1) et (2),

$$P - NR = 0.$$

et sur l'ancre

$$F - fN'R = 0.$$

En divisant la première équation par la seconde et simplifiant, on trouve

$$\frac{P}{F} = \frac{1}{f}$$

d'où

$$F = fP,$$

valeur de la force absorbée par le frottement des dents contre les leviers d'entrée et de sortie dans un sens et dans l'autre.

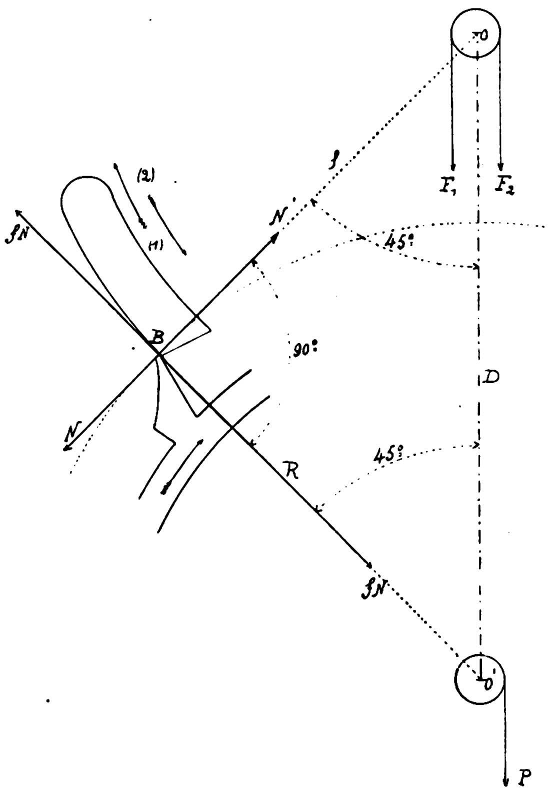


Fig. 148.

CHAPITRE VIII.

ÉCHAPPEMENT DUPLEX.

541. **Préliminaires.**— Ce système fut construit vers le milieu du XVIIIe siècle par l'horloger Pierre Leroy. Le nom de cet échappement provient sans doute du fait que la construction primitive comportait deux roues d'échappement montées sur un même axe : de là le mot « duplex », qui veut dire double. Comme régularité, cet échappement est supérieur au cylindre, mais il rentre également dans la catégorie des échappements à repos frottants. Son exécution ne souffre aucune médiocrité ; il a en outre contre lui sa facilité à s'arrêter au doigt et son repos trop éloigné de la tangente. S'il est de nos jours à peu près complètement abandonné, lors même que l'on construise encore l'échappement à cylindre, le fait provient de son prix beaucoup plus élevé ; il a été du reste remplacé par un mécanisme supérieur, qui est l'échappement à ancre.

542. **Organes de l'échappement duplex.** — Les organes dont se compose cet échappement, sont :

la roue,
le rouleau,
le grand levier.

543. — **La roue d'échappement** porte une double rangée de dents, les unes longues et pointues situées dans le plan même de la roue, les autres petites, triangulaires et implantées perpendiculairement aux premières sur le limbe de la roue. Comme nous l'avons dit, le pignon d'échappement portait autrefois deux roues superposées que l'on désignait, par

suite de la différence de leurs fonctions et de leur diamètre, sous les noms de « grande roue » ou *roue de repos* et de « petite roue » ou *roue d'impulsion*. Ces dénominations sont encore en usage de nos jours en ce sens que les dents sont désignées par les noms de dents de « repos » et de dents « d'impulsion ». La roue d'échappement duplex doit remplir toutes les conditions de légèreté que nous avons précédemment indiquées pour les échappements à ancre et à cylindre.

544. — **Le rouleau** est un petit cylindre en pierre dure, généralement en rubis, porté par l'axe du balancier, concentriquement à son centre. Ce rouleau est gommé sur l'axe et maintenu au surplus par sa partie inférieure au moyen d'une petite virole en laiton ; il est entaillé d'une fente longitudinale suffisamment profonde pour que les dents de la roue n'en puissent toucher le fond. (Fig. 149.)

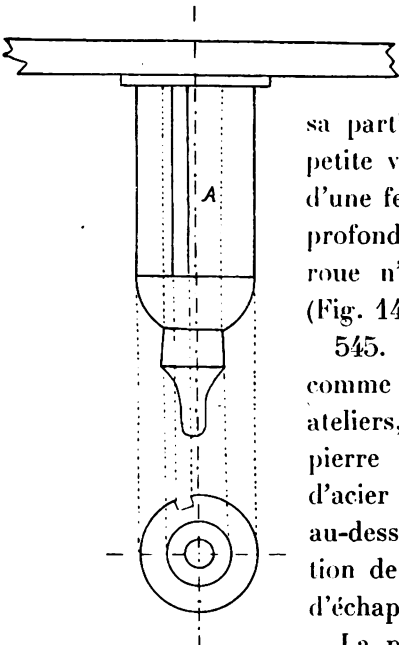


Fig. 149.

545. — **Le levier,** ou *grande levée*, comme on l'appelle parfois dans les ateliers, est une pièce également en pierre et portée par un « plateau » d'acier ajusté sur l'axe du balancier au-dessus du rouleau. Il a pour fonction de recevoir l'impulsion de la roue d'échappement.

La planche 15 représente la disposition et les formes adoptées pour ces trois organes.

Fonctionnement de l'échappement duplex.

546. — Nous supposons, comme nous l'avons déjà fait pour les échappements à ancre et à cylindre, que le balancier a été écarté de sa position de repos de la moitié de son arc d'oscillation totale et que, soumis à l'action du spiral, il

revienne en arrière. Pendant le parcours de l'arc supplémentaire, une des longues dents de la roue demeure appuyée contre la surface extérieure du rouleau et, si le balancier tourne de la droite vers la gauche, cette position de repos se trouve légèrement interrompue par un petit soubresaut ou recul de la roue quand l'encoche du rouleau vient à passer. C'est tout ce qui se passe pendant cette oscillation dite « muette ». Au retour du balancier, c'est-à-dire pendant l'oscillation suivante, la dent de la roue reste encore appuyée contre le rouleau jusqu'au moment où l'entaille, venant se présenter devant la dent de repos, laisse la roue un instant libre ; la force du ressort moteur, agissant alors, anime la roue ; cette dent tombe dans la fente et vient choquer le flanc droit de la coche. Il se produit alors une impulsion pendant un très petit arc ; c'est la « petite impulsion » ; qui se termine à l'instant où la dent quitte le rouleau. Comme la roue devient alors libre, la dent d'impulsion tombe sur la grande levée et opère la levée d'impulsion, qui se termine au moment où cette dent, devenant libre à son tour, permet à une grande dent suivante de tomber sur le repos.

Le balancier après avoir parcouru un certain arc, est de nouveau ramené par la force du spiral et accomplit une vibration « muette » en tournant vers la gauche ; puis, revenant à droite, il se retrouve, ainsi que la roue, dans une situation identique à celle que nous avons décrite, et ainsi de suite pour toutes les vibrations successives.

La grande levée, pendant toute cette période, ne touche pas aux dents d'impulsion devant lesquelles elle passe. Le contact ne peut avoir lieu que lorsque la « petite levée » est assez avancée pour permettre à la dent d'impulsion de se rapprocher de la ligne des centres.

547. — On voit que l'impulsion n'est donnée que de deux en deux oscillations, que la dent n'échappe au rouleau qu'après l'aller et le retour du balancier et qu'ainsi l'impulsion n'a lieu que d'un seul côté. Il en est de même pour l'échappement à détente.

548. — Cette levée totale se distingue de celle qui caractérise ce dernier en ce qu'elle se décompose en deux parties bien distinctes :

1° La *petite levée*, ou arc parcouru pendant que la grande dent agit dans la coche du rouleau ;

2° La *grande levée*, ou arc parcouru pendant tout le temps que dure le contact de la dent d'impulsion avec le levier de rubis.

Ces deux impulsions successives sont seulement séparées par une petite chute nécessaire à la sécurité des fonctions et que l'on nomme « première chute » par opposition à la « seconde » qui termine le grand arc de levée.

Principes de l'échappement duplex.

549. — La régularité de marche d'un échappement duplex, de même que celle de l'échappement à cylindre, tient plutôt à une judicieuse application des principes des échappements à repos frottant qu'à des règles mathématiques rigoureuses.

Dans l'un comme dans l'autre, deux forces sont en action sur le balancier ; l'une accélère son mouvement, l'autre le retarde. Ce double effet se combine encore avec une autre action, qui est celle du spiral. Le rapport entre les différents membres de la combinaison est tel qu'il donne à tout le système une assez grande sensibilité aux variations de la force motrice et à l'épaississement des huiles, tout en laissant une certaine liberté au spiral lorsque ces variations se produisent.

550. — La principale donnée d'un tel échappement est sans contredit l'angle de levée et cet angle, une fois connu, peut servir à déduire, comme dans l'échappement à cylindre, divers autres éléments. Nous donnerons maintenant les principales proportions généralement adoptées pour ce genre d'échappement.

551. **Grosseur du rouleau.**— Ce diamètre étant un des éléments de la combinaison mécanique que nous considérons, doit évi-

demment se déduire de l'ensemble du mécanisme, c'est-à-dire de la quantité de force motrice qui doit être neutralisée par la pression au repos. L'effet de la pression doit croître ou décroître proportionnellement à cette dimension. Cela posé, on peut reconnaître ici la possibilité d'établir une relation mathématique déterminant cette valeur. Nous nous abstiendrons de donner ce calcul pour le moment, et nous nous bornerons à apprécier les résultats des expériences, résultats qui seront fort suffisants pour le but que nous poursuivons.

552. — En examinant deux montres parfaitement pareilles et munies toutes deux d'un échappement duplex, avec cette seule différence que le rouleau de l'une est très petit et celui de la seconde relativement beaucoup plus grand, on pourra constater dans la marche de ces deux pièces des divergences très appréciables.

On remarque en effet que le balancier de celle qui possède le petit rouleau, parcourt des arcs de vibration plus grands que celle construite avec le grand rouleau ; et il doit nécessairement en être ainsi, puisque, dans le premier cas, le travail de la force du frottement est moindre et le recul de la roue beaucoup plus petit pour une coche plus petite aussi.

De cette expérience, il ne faudrait pas conclure que le rouleau doive être aussi réduit que l'exécution pratique peut le permettre, car en diminuant les frottements, on enlèverait aussi les conditions essentielles de sécurité de marche, que nous passerons rapidement en revue.

553. — Un rouleau trop petit est d'une grande fragilité ; il rend l'échappement plus sujet à laisser passer deux dents coup sur coup, lorsque la montre reçoit un choc. La tige, traversant le rouleau, devient très faible, ce qui rend encore plus fragile un axe qui l'est déjà trop. La division de la roue doit être très exacte, ce qui est difficile à obtenir, surtout pour ces roues-là. Afin de ne pas courir le risque de couper le rouleau, on est obligé de faire l'encoche très peu profonde ; aussi les dents sont-elles facilement gênées par la moindre

poussière, ou même par le simple épaississement de l'huile. En somme, et pour conclure, nous pouvons dire que, lorsque le rouleau est très petit, les fonctions de l'échappement doivent s'accomplir avec une précision mathématique difficile à obtenir pratiquement; c'est pourquoi les constructeurs ont admis comme base du diamètre de leurs rouleaux les $^2/_6$ ou les $^2/_7$ de l'espace compris entre deux longues dents de la roue (Claudius Saunier).

554. **Grande levée. — Longueur du levier d'impulsion.** — En thèse générale, on peut dire que toute combinaison d'échappement est subordonnée à l'étendue de la levée, et cet angle de levée est lui-même une conséquence de la force impulsive et des vitesses relatives des organes agissant les uns sur les autres.

555. — Comme donnée d'expérience, on peut admettre qu'une levée de 35° est suffisante, la chute étant comprise dans cet angle.

556. — La longueur qu'il faudra donner au levier d'impulsion est toujours subordonnée à cet angle de levée, à la grandeur de la roue d'impulsion et au nombre de ses dents. On peut donc dire que la longueur de l'arc de levée sera d'autant plus grande que la roue d'échappement aura un nombre moins grand de dents.

557. — La longueur du levier ne pourra être déterminée que lorsqu'on aura fixé la valeur de l'angle de levée, le nombre de dents de la roue et même la grosseur du rouleau.

Nous verrons du reste plus loin le moyen de déterminer graphiquement cette longueur.

558. **Position de la dent d'impulsion.** — La position que la dent d'impulsion doit occuper entre deux dents de repos, ne peut pas être choisie à volonté; cette dent doit toujours être placée au milieu de l'intervalle angulaire séparant deux dents de repos. En effet, pendant une vibration muette du balancier, le levier effleure la dent d'impulsion de droite et, pendant l'arc contraire, il passe devant celle de gauche, mais seulement vers la fin de la petite levée, quand la grande dent va s'échapper

de la coche du rouleau. Enfin, lorsque la grande dent a parcouru seulement la moitié de son arc d'impulsion, il est nécessaire que l'extrémité du levier passe à égale distance de deux dents d'impulsion, d'où il résulte que leur position est bien marquée de la façon que nous avons indiquée.

559. **Petite levée. — Pénétration de la dent dans le rouleau.** — L'expérience a prouvé qu'une petite levée de 70° est nécessaire pour assurer la fonction du repos de la dent et qu'il est assez inutile de pousser cette valeur au-delà, puisqu'on ne fait ainsi qu'augmenter la difficulté de l'arrêt au doigt.

560. — Cet angle de levée détermine la quantité de pénétration de la dent dans le rouleau pendant la petite impulsion ; il semblerait de prime abord que cette pénétration ne soit pas suffisante ; mais l'expérience prouve que ce n'est pas de ce côté-là que les échappements duplex sont le plus souvent en défaut.

561. **De la coche du rouleau.** — Cette entaille doit avoir la largeur nécessaire au jeu libre de la dent durant l'action complète de la petite levée ; aussi un léger ébat est-il obligatoire dans toutes les positions de la levée. Les bords ou lèvres de la coche ne doivent être que très finement arrondis et surtout bien polis, ainsi du reste que toute la surface du rouleau.

562. **Tracé de l'échappement duplex.** — Supposons connu le rayon R de la roue de 150^{mm} et admettons 70° pour la petite levée et 35° pour la grande. En convenant de construire le rouleau de façon à ce que son diamètre soit les 2/7 de la distance qui sépare deux dents consécutives, nous aurons

$$\varrho = \frac{2\,\pi\,R}{15 \times 7} = \frac{2\,\pi \times 150}{105} = 8{,}976\ ;$$

nous poserons, en forçant légèrement le chiffre

$$\varrho = 9\ \text{mm}.$$

Traçons la ligne des centres et choisissons un point convenable O comme centre du rouleau (planche 15) ; de ce centre décrivons, avec une ouverture de compas égale à 9 $^{m}/_{m}$, une circonférence qui représentera notre rouleau. A partir de la

ligne des centres marquons un angle O′OB de 35°, dont le sommet est le centre du rouleau et, du point *c*, avec une ouverture de compas égale au rayon de la roue, on trouve le centre O′ de la roue.

563. — Il est cependant préférable de calculer la distance D des centres comme suit.

Dans le triangle O′*c*O, nous connaissons 2 côtés ϱ et R et un angle en O de 35°, moitié de la petite levée ; nous aurons donc :

$$\frac{\varrho}{R} = \frac{\sin cOO'}{\sin 35^\circ},$$

d'où

$$\sin cOO' = \frac{\varrho \sin 35^\circ}{R}.$$

Le calcul donne :

$$\begin{aligned} \log : \varrho &= 0{,}9542425 \\ + \log. \sin 35^\circ &= 9{,}7585913 \\ & \overline{10{,}7128338} \\ - \log R, &= 2{,}1760913 \\ \log \sin cO'O &= 8{,}5367425 \\ cO'O &= 1^\circ 58' 19'',8 \end{aligned}$$

Connaissant cet angle, nous posons :

$$\frac{R}{D} = \frac{\sin 35^\circ}{\sin OcO'},$$

formule dans laquelle

$$OcO' = 180^\circ - (35^\circ + 1^\circ 58' 19'',8)$$

Donc

$$D = \frac{R \sin . 36^\circ 58' 19'',8}{\sin 35^\circ}.$$

En effectuant les calculs :

$$\begin{aligned} \log R &= 2{,}1760913 \\ + \log . \sin . 36^\circ 58' 19'',8 &= 9{,}7791829 \\ & \overline{11{,}9552742} \\ - \log \sin 35^\circ &= 9{,}7585913 \\ \log D &= 2{,}1966829 \end{aligned}$$

et $D = 157{,}283$ m/m

564. — La sûreté, c'est-à-dire la quantité de pénétration des deux arcs de cercle, est ainsi très faible, puisqu'elle ne mesure que

$$9 - 7{,}283 = 1{,}717\ ^{m}/_{m}.$$

Comme l'échelle de notre tracé est d'environ 36 fois la grandeur naturelle, il n'y aura pratiquement qu'une pénétration de 0,047 $^{m}/_{m}$. On est donc obligé de donner relativement peu d'ébat aux pivots, et c'est là le point faible de l'échappement duplex.

565. — Le point de repos sur le rouleau se trouve en *c* ; la ligne *c*O′ indique la position de la grande dent *cx*.

La dent d'impulsion devant occuper le milieu entre les deux pointes de dents, on tire la ligne O′T partageant en deux parties égales l'angle *c*O′L de 24°. Du centre O, on trace les lignes ON et OM formant entre elles un angle de 35°, angle que la ligne des centres doit partager en deux parties égales. Le point H, où les deux lignes O′T et ON se coupent, donne la position de la dent d'impulsion, la longueur du levier et le rayon de la petite roue ou roue d'impulsion. Sur la serge de la petite roue, on mesure l'arc *x y*, que l'on reporte en GE et en HF; cette distance sert à déterminer le déplacement en avant de la roue pendant la petite levée. On marque ensuite le point S, c'est-à-dire la position du levier à la fin de la petite levée, en mesurant du point E un arc ES de 10° ; puis, avec une ouverture de compas égale à EH, c'est-à-dire à l'arc de petite levée, on détermine, du point S pris pour centre, le point R qui donne la position du levier au commencement de la petite levée.

566. **Des frottements dans l'échappement duplex.** — Le calcul du frottement peut s'effectuer d'après les formules (1) et (2), que nous avons déterminées pour l'échappement à cylindre (535). Nous aurons

$$F = \frac{P f \varrho}{D.\ \sin \beta \pm f\,(D.\ \cos \beta - \varrho)}.$$

Dans ce cas $\beta = 35°$. $D = 1$. $\varrho = 0{,}06$ et $f = 0{,}15$.

Le calcul donne :

$$F_1 = 0{,}013092 \text{ gr. } F_2 = 0{,}019578 \text{ gr.}$$

frottements fuyant et rentrant pour $P = 1$.

Remarque. — Si l'angle de petite levée avait été de 45 au lieu de 70 degrés, on aurait eu de même façon :

$$F_1 = 0{,}01664 \text{ gr. et } F_2 = 0{,}03375 \text{ gr.}$$

CHAPITRE IX.

ÉCHAPPEMENT A DÉTENTE.

567. **Préliminaires.** — L'invention et les premiers essais de cette construction remontent vers l'année 1748 et sont dus à l'horloger Pierre Leroy.

L'échappement à détente est le premier échappement libre que l'ont ait construit, l'échappement à ancre n'étant venu que quelques années plus tard.

La détente à laquelle cet échappement doit son nom, affecte deux dispositions spéciales, d'où résultent deux variétés du système. La première est appellée échappement à *détente ressort* ou simplement à *ressort*, et la seconde échappement à *détente pivotée* ou à *bascule*. Nous verrons plus loin la différence existant entre ces deux constructions.

568. — Les fonctions de l'échappement à détente sont simples, mais ce mécanisme ne souffre aucun vice de principe ni aucune médiocrité d'exécution. L'admirable régularité de marche que lui doivent en grande partie les chronomètres de marine construits par des fabricants distingués, a fait croire un moment qu'on pourrait l'employer avec avantage dans l'horlogerie civile ; mais les essais n'ont donné de bons résultats que dans les pièces de précision ; pour les autres, on ne rencontre que des inconvénients pratiques.

568. **Organes de l'échappement.** — Ils sont au nombre de quatre, qui sont les suivants :

la roue d'échappement,
la détente,
la grande levée et son plateau,
la petite levée et son plateau.

Examinons-les chacun séparément.

569. **La roue d'échappement** est une roue légèrement creu-

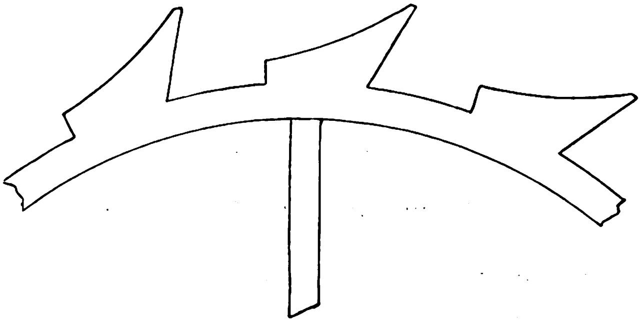


Fig. 150.

sée portant des dents de forme pointue. Elle se fait généralement en laiton bien forgé ou en alliage d'or.

La fig. 150 indique la forme adoptée pour ses dents.

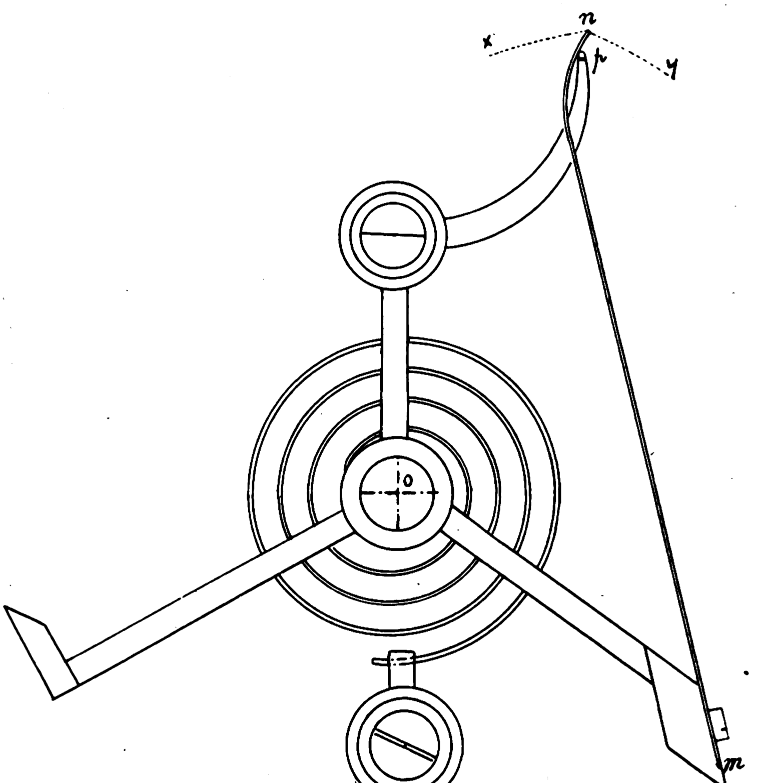


Fig. 151.

571. La *détente* est une pièce d'arrêt, mobile soit autour du centre de flexion d'un mince ressort faisant corps avec elle, soit autour d'un axe pivoté. C'est sur cette pièce d'arrêt que la roue vient faire repos. A cet effet, la détente porte en saillie (fig. 151) un petit demi-cylindre de rubis. La dent de la roue au repos s'appuie sur la face plate longitudinale de ce demi-cylindre. De là le nom de *repos* qu'on lui a

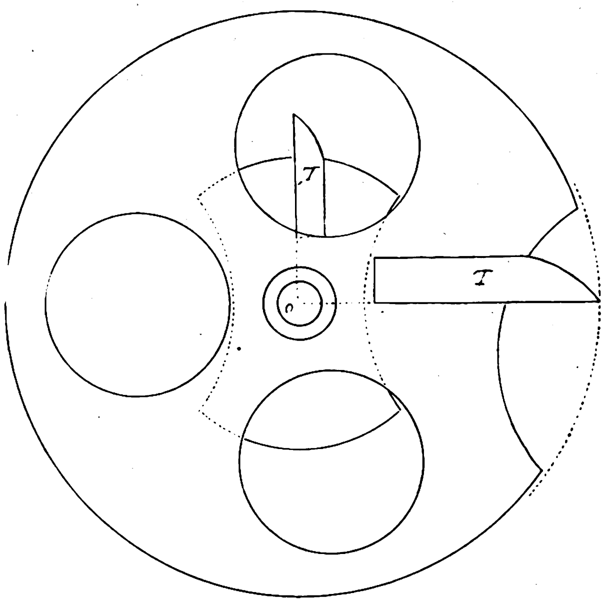


Fig. 152.

donné. Le petit ressort *mn*, également fixé à la détente, est appelé habituellement le *ressort en or* à cause de sa composition métallique habituelle. Ce ressort, très faible, s'appuie contre la partie relevée en *p* du corps de la détente de telle façon qu'il peut fléchir de *n* vers *x*, mais qu'il ne peut s'écarter de *n* vers *y* sans entraîner avec lui la détente.

572. — Le balancier porte concentriquement à son axe un disque d'acier dans lequel est encastrée une pièce en rubis appelée *levée*. C'est ce levier qui est destiné à recevoir l'impulsion de la roue lorsque la dent est dégagée du repos. Cette levée est représentée en L (fig. 152).

573. — Le dégagement s'opère au moyen d'un deuxième

levier L′ appelée la *petite levée*. Cette pièce est de même en rubis et encastrée dans un deuxième plateau fixé sur l'axe du balancier au-dessous du premier.

574. — Maintenant que nous connaissons les organes dont se compose l'échappement à détente, nous pouvons en étudier le fonctionnement.

575. — **Fonctionnement de l'échappement à détente.** — Le balancier étant au repos et le spiral au point nul de tension, en armant le ressort moteur de la montre, il ne résulte aucun mouvement dans l'échappement, mais simplement une pression de la dent sur la face plate du repos en rubis (planche 16). Mais, en conduisant le balancier de la droite vers la gauche, la petite levée L′ fait fléchir le ressort en or et passe outre. Au retour du balancier, cette même petite levée rencontre également le ressort en or ; mais celui-ci, étant appuyé contre l'extrémité relevée de la détente et ne pouvant par conséquent plus fléchir, entraîne avec lui la détente.

576. — Si l'échappement considéré est à détente bascule (567), cette dernière oscillera autour de son axe pivoté ; si elle est à *ressort*, elle se mouvra autour du centre de flexion de la lame du ressort (planche 17).

577. — Par suite de ce mouvement, la dent qui était appuyée sur le repos, devient libre et la roue commence à se mouvoir. En cet instant, la grande levée doit se trouver dans une position telle que la dent puisse la rencontrer sans avoir à parcourir un angle de chute exagéré avant d'entrer en contact. A leur rencontre il se produit un choc qui a pour effet d'augmenter la vitesse du balancier. Cette dent est alors en prise avec la levée, qui est menée ainsi pendant un arc déterminé en recevant une certaine impulsion. Cette impulsion se termine par une chute et l'arrêt de la dent sur la face du repos de la détente revenue, en vertu de son élasticité et avant la fin de la levée, à la position de laquelle elle avait été écartée par la petite levée. Le balancier, ayant ainsi reçu une impulsion, continue librement le parcours de son arc supplémentaire jusqu'au moment où la force élastique du spiral le

ramène en arrière. Son retour produit alors une vibration *muette*, durant laquelle il ne fait qu'écarter sur son passage le petit ressort en or. C'est lorsque le balancier revient de nouveau sur lui-même qu'il opère le deuxième dégagement, comme nous l'avons expliqué, et ainsi de suite.

578. — Comme on vient de s'en rendre compte, cet échappement appartient au genre de ceux dits à « coup perdu », dans lesquels le balancier ne reçoit d'impulsion que toutes les deux oscillations. Il a l'inconvénient de s'arrêter au doigt, c'est-à-dire qu'il ne se met pas en marche de lui-même quand on remonte le ressort moteur. Ce fait nécessite la mise en marche du chronomètre par une impulsion directe extérieure, résultant d'une secousse ou ébranlement circulaire donné à tout le système.

Définitions techniques.

579. **Chutes.** — Pendant que le balancier accomplit l'arc d'oscillation durant lequel il reçoit l'impulsion de la roue d'échappement, il se produit deux espèces de chutes, savoir : chute de la dent d'entrée et chute de la dent de sortie. Comme l'effet direct de chacune de ces chutes est une perte de force motrice, il convient de les rendre aussi faibles que possible.

580. — La chute de la dent d'entrée est l'angle parcouru par la roue depuis la position où une dent quitte le repos jusqu'à celle où la dent d'entrée vient rencontrer la levée.

581. — La chute de la dent de sortie est l'angle parcouru par la roue depuis la position où une dent quitte la grande levée jusqu'à celle où une dent suivante tombe sur le repos.

582. **Repos.** — Le repos est une valeur linéaire suivant laquelle est mesuré l'espace occupé par la dent lorsqu'elle s'appuie sur la pièce fixée dans ce but sur la détente. L'angle parcouru par la bascule pour effectuer le dégagement dépend donc de la distance du point de repos au centre de mouvement ; il est plus grand pour courte que pour longue bascule.

583. **Angle d'impulsion.** — L'angle d'impulsion est l'angle

parcouru par le balancier pendant qu'une dent de la roue est en contact avec la grande levée.

584. **Proportions et dimensions des organes de l'échappement.** — Comme objet de l'étude qui va suivre, nous envisagerons l'échappement à *courte bascule* ; c'est, parmi les divers types d'échappements à détente, celui qui a, jusqu'à ce jour, donné les meilleurs résultats pour les chronomètres de poche (fig. 151).

585. — Dans l'échappement à bascule, on place quelquefois le repos sur la dent qui suit immédiatement celle de sortie et d'autres fois sur celle qui se trouve après celle-ci.

En plaçant le repos sur la première dent, l'irrégularité du taillage toujours inévitable se fait moins sentir qu'en le plaçant sur la seconde. Dans le premier cas, en effet, l'erreur de division n'est comprise que dans l'angle formé par deux dents successives, tandis que dans le second cette erreur comprend l'irrégularité de trois dents.

586. **Dimension de la roue et longueur du rayon de la grande levée.** — Le plus généralement on a pour données, en construisant un échappement à bascule, la distance entre le centre du balancier et celui de la roue, ainsi que l'angle d'impulsion théorique, c'est-à-dire celui dans lequel il est fait abstraction des chutes. Les inconnues sont alors les deux rayons de la roue et de la circonférence décrite par la pointe de la grande levée. Au moyen des données qui précèdent, on peut déterminer ces deux valeurs, soit par une méthode graphique, soit par un calcul trigonométrique.

587. — 1° *Construction graphique.* — Supposons que nous ayons les données suivantes :

a) distance des centres : 6 mm.,

b) angle d'impulsion : 40°.

On commence par adopter une échelle de dessin convenable, en prenant par exemple un agrandissement de 20 fois la grandeur naturelle, ce qui donnera pour le dessin une distance des centres de 120 mm. Déterminons ces deux points sur le papier et joignons-les par une droite OO′ (fig 153).

588. — Comme l'extrémité des dents n'est pas formée directement par l'intersection de deux lignes géométriques, mais qu'on leur conserve au contraire une petite surface

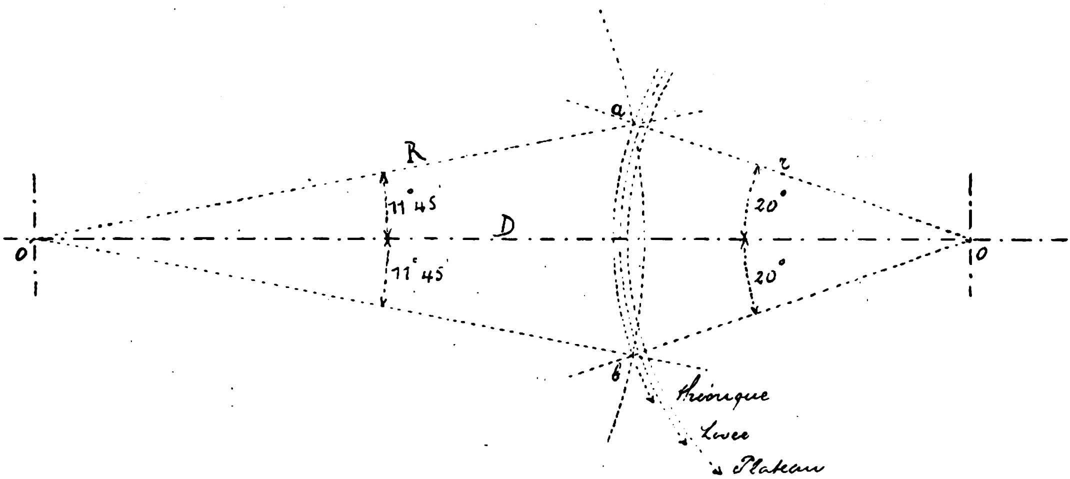


Fig. 153.

aplatie afin d'en assurer la solidité, nous pourrons estimer cette valeur à un demi-degré de circonférence. Dans ce cas l'angle formé par les deux rayons aboutissant, l'un à la pointe d'une dent et l'autre au dos de la suivante, sera de

$$\frac{360^\circ}{15} - 0^\circ 30' = 23^\circ\ 30'.$$

On porte donc, du point O′ comme sommet et de chaque côté de la ligne des centres, la moitié de cet angle, soit

$$11^\circ 45'.$$

De même on portera, du point O et de chaque côté de la ligne des centres, la moitié de l'angle d'impulsion, donc

$$20^\circ.$$

Les côtés respectifs de ces angles viendront par conséquent se couper en des points *a* et *b*, et le rayon de la roue sera représenté sur la figure par les lignes

$$O'a = O'b = R.$$

Pour retrouver sa valeur naturelle, nous n'aurons plus qu'à diviser la grandeur linéaire ainsi obtenue par le grossissement adopté de 20 fois.

589. — Pour déterminer maintenant le rayon r de la circonférence décrite par la pointe de la grande levée, on mesurera d'abord la droite $Oa = Ob$, que l'on divisera de même par 20. Cette valeur ne sera cependant pas tout-à-fait celle que nous adoptons en pratique, car il faut observer que la pointe de la levée doit pouvoir passer devant les dents de la roue sans les toucher, même dans le cas extrême où le balancier et la roue viennent à subir une pression l'un vers l'autre. Dans ce cas, les deux mobiles se rapprochent chacun d'un demi-ébat de pivot, à la somme desquels nous ajoutons encore un ébat de sûreté, ce qui fera un total de deux ébats de pivots.

On peut admettre comme valeur de ce jeu un chiffre de

$$0{,}0125^{mm}.$$

Deux ébats donnent donc

$$0{,}025^{mm}.$$

Il faudra en conséquence diminuer le rayon r de la levée de $0{,}025^{mm}$.

590. — Nous avons dit que cette levée est ajustée dans un disque ou plateau circulaire que l'on nomme généralement *grand plateau*. Cette disposition a pour but d'empêcher le rouage de se mettre en mouvement lorsque la montre reçoit un choc extérieur qui dégage la dent du repos pendant une oscillation du balancier. Afin d'éviter un arcboutement considérable lorsque, dans cette circonstance, la dent vient s'appuyer contre le bord extérieur de ce plateau, on l'exécute aussi grand que possible, en veillant toutefois à ce que le *jour* que forme le bord du plateau avec les dents, soit suffisant. Admettons que ce jour puisse être le double de celui qui existe, d'après les données qui précèdent, entre les dents et la pointe de la levée, soit de

$$0{,}05^{mm}.$$

Ceci pour la raison qu'une pointe passe plus facilement devant les dents qu'un plateau, qui peut n'être pas exacte-

ment circulaire et auquel peuvent s'attacher plus facilement des poussières ou corpuscules étrangers. On obtiendra donc ainsi le diamètre du grand plateau.

591. — 2° *Calcul trigonométrique.* — Pour résoudre ce problème trigonométriquement, nous envisagerons le triangle $OO'a$, dans lequel nous connaissons le côté OO' et les deux angles adjacents aOO' et $aO'O$ (fig. 153).

Appelons, pour simplifier,

côté $OO' = D$,
» $aO = R$,
» $aO' = r$,

angle $aOO' = \gamma$,
et angle $aO'O = \beta$.

Nous pourrons poser

$$\frac{D}{r} = \frac{\sin(\gamma + \beta)}{\sin\beta},$$

d'où

$$r = D\,\frac{\sin\beta}{\sin(\gamma+\beta)}.$$

De même on obtiendrait

$$R = D\,\frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma+\beta)}.$$

Comme exemple numérique, soient :

$D = 6{,}35^{m}/^{m}$, $\gamma = 20^{\circ}$,
$\beta = 11^{\circ}\,45'$, $\gamma + \beta = 31^{\circ}\,45'$.

Nous aurons

$$\begin{aligned}
\log.\ D &= 0{,}8027737\\
-\log.\sin.\ 31^{\circ}45' &= \underline{9{,}7211623}\\
&\quad\ 1{,}0816114 - 10\\
+\log.\sin 20^{\circ} &= \underline{9{,}5340517}\\
&\quad\ 0{,}6156631
\end{aligned}$$

$$\text{Nombre} = 4{,}1273\ {}^{m}/_{m}.$$

$$\begin{aligned}
\log.\frac{D}{\sin.\ 31^{\circ}45'} &= 1{,}0816114 - 10\\
+\log.\sin 11^{\circ}\,45' &= \underline{9{,}3088668}\\
&\quad\ 0{,}3904782
\end{aligned}$$

$$\text{Nombre} = 2{,}4574\ {}^{m}/_{m}.$$

Le rayon de la roue vaudra donc

$$R = 4{,}1273\ ^m/_m,$$

celui de la levée sera

$$r = 2{,}4574 - 0{,}025 = 2{,}4324\ ^m/_m.$$

Le diamètre du plateau devra être

$$2\,(2{,}4574 - 0{,}05) = 2{,}4074\ ^m/_m \times 2 = 4{,}8148\ ^m/_m.$$

Il peut être utile aussi, pour l'exécution pratique, de connaître la distance diamétrale mesurée d'un côté sur le bord du plateau et de l'autre sur la pointe de la levée. Cette valeur devra être :

rayon de la levée = 2,4324
rayon du plateau = 2,4074.
diamètre cherché = 4,8398.

Pour D = 6,5, on trouve :

$$R = 4{,}224\ ^m/_m$$
$$r = 2{,}515\ ^m/_m.$$

Calcul des chutes.

592. — 1° *Chute d'entrée.* — La chute pour la dent d'entrée dépend de l'angle formé par l'écartement de la grande et de la petite levée. On augmente, en effet, la chute en faisant tourner le petit plateau de façon que l'angle formé par les deux levées devienne plus petit et on la diminue en augmentant cet angle.

On obtiendrait le minimum de chute lorsque le point de rencontre de la dent et de la pointe de la levée coïncide avec le point d'intersection de la circonférence décrite par la pointe de la levée. Remarquons cependant que, dans ce cas, la moindre imperfection pourrait laisser passer la dent devant la levée.

Pour éviter cela, on augmente la chute et l'on admet que la rencontre ait lieu sur la circonférence parcourue par un point de la levée éloigné de 0,025 $^m/_m$, donc de deux ébats de pivot, de la pointe de la levée.

Nous aurons ainsi :

$$r_1 = 2{,}4074^{m}/_{m}$$

et il faudra résoudre le triangle OaO', duquel nous connaissons les 3 côtés R, r_1 et D (fig. 154).

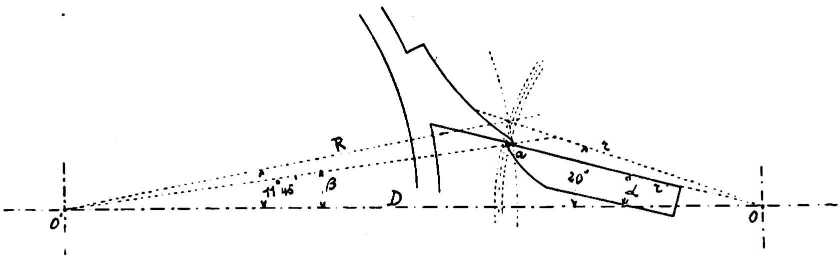


Fig. 154.

Servons-nous de l'équation générale

$$\sin.\ {}^1/_2\, A = \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{b\, c}},$$

qui deviendra pour ce cas

$$\sin\ {}^1/_2\, \beta = \sqrt{\frac{\left(\frac{D + r_1 + R}{2} - R\right)\left(\frac{D + r_1 + R}{2} - D\right)}{D\, R}} \quad (1)$$

En admettant, par exemple :

$$D = 6{,}35\,;$$
$$r_1 = 2{,}4074,$$
$$R = 4{,}1272,$$

nous aurions :

$$p = \frac{D + r_1 + R}{2} = 6{,}4423 = \text{demi-périmètre.}$$

En effectuant les calculs indiqués par l'équation ci-dessus, on arrive à

$${}^1/_2\, \beta = 5^{o}\, 10'\, 50'' \quad \beta = 10^{o}\, 21'\, 40''.$$

Donc la chute de la dent d'entrée sera égale à

$$11^{o}\, 45' - \beta = 11^{o}\, 45' - 10^{o}\, 21'\, 40'' = 1^{o}\, 23'\, 20''.$$

$$\text{Pour } D = 6{,}5^{m}/_{m},$$

la chute d'entrée serait

$$1^{o}\, 23'\, 6''.$$

593. 2° *Chute de sortie.* — Pour déterminer la chute de la dent de sortie, nous avons à résoudre le triangle $O'bO$,

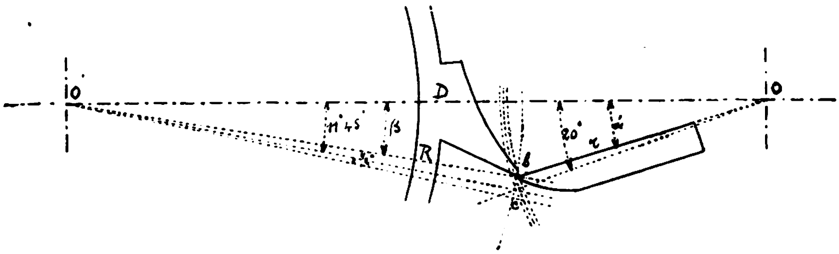


Fig. 155.

(fig. 155) duquel nous connaissons de même les trois côtés, et nous avons à déterminer l'angle β. Dans ce cas, r est égal au rayon de la circonférence décrite par la pointe de la levée, donc à

$$r = 2{,}4324 \ ^{m}/_{m},$$

et la solution de ce problème est identique à la précédente.

Le calcul de l'équation (1) nous donne

$$^{1}/_{2}\ \beta = 5^{\circ}\ 32'\ 10'' \quad \beta = 11^{\circ}\ 4'\ 20''.$$

Nous aurons donc la chute de la dent de sortie égale à

$$11^{\circ}\ 45' + 0^{\circ}\ 30' - 11^{\circ}\ 4'\ 20'' = 1^{\circ}\ 10'\ 40''.$$

594. **Remarque.** — Il est intéressant de voir que, pour diverses valeurs de D, cet angle diminue en même temps que cette distance augmente ; ainsi pour

$D = 3\ ^{m}/_{m}$, nous avons chute $= 1^{\circ}\ 59'\ 20''$,
$D = 6\ ^{m}/_{m}$, » » » $= 1^{\circ}\ 12'\ 57''$,
$D = 6{,}35\ ^{m}/_{m}$, » » » $= 1^{\circ}\ 10'\ 40''$, etc.

595. **Angle parcouru par la roue pendant qu'elle donne l'impulsion.** — Cet angle doit évidemment être égal à la somme des deux angles β (592 et 593), donc

$$10^{\circ}\ 21'\ 40'' + 11^{\circ}\ 4'\ 20'' = 21^{\circ}\ 26'.$$

Remarquons encore que la chute d'entrée, comme aussi l'angle parcouru par la roue, sont calculés en admettant que l'on conduise le balancier très lentement ; ces deux angles

subissent encore une certaine diminution par le fait du mouvement rapide du balancier et de l'inertie de la roue.

596. — **Angle parcouru par la grande levée pendant que la roue donne l'impulsion.** — Pour résoudre ce problème, nous avons recherché la valeur de l'angle α, avant et après la ligne des centres (fig. 154 et 155). Nous posons

$$\sin {}^1\!/_2\, \alpha = \sqrt{\frac{(p-r)(p-D)}{D\, r}}.$$

En effectuant ce double calcul, on arrive à :

α, après la ligne des centres (fig. 155) $= 19^\circ\ 1'\ 6''$,
α, avant » » (fig. 154) $= 17^\circ\ 57'\ 32''$,

L'angle d'impulsion $= 36^\circ\ 58'\ 38''$.

Direction du plan de repos.

597. — La direction du plan de repos doit être telle que la dent de la roue tende constamment à attirer la bascule à sa position de repos, sans que pour cela le balancier ait à éprouver une trop grande résistance en opérant le dégagement.

598. — Commençons par rechercher théoriquement le moment de force P avec lequel la bascule est attirée contre son point d'appui.

Soit donc F le moment de la force qui sollicite la roue, et P le moment que nous recherchons.

Les moments de force agissant sur la roue sont : d'abord le moment moteur F. Ensuite la dent reçoit une pression normale N au point de contact c (fig. 156).

Le moment de cette force est :

$$-\,N.\,0''b = -\,N.\,R \cos \beta,$$

en désignant par β l'angle $c0b$ et par R le rayon de la roue. En plus nous avons encore à considérer la force du frottement de la dent contre le repos ; cette force est égale à fN et son moment sera :

$$-fN.\,0''d = -fN.\,R \sin \beta.$$

Nous pouvons donc écrire :

$$(1)\ F - N.\ R\cos\beta - fN.\ R\sin\beta = 0.$$

Examinons maintenant de même les moments de forces agissant sur la bascule.

Nous aurons d'abord le moment P, puis la pression normale N', dont le moment est

$$- N'.\ O'b' = - N'.\ \varrho \sin\alpha,$$

en désignant par ϱ le rayon $O'c$ et par α l'angle $O'cb'$.

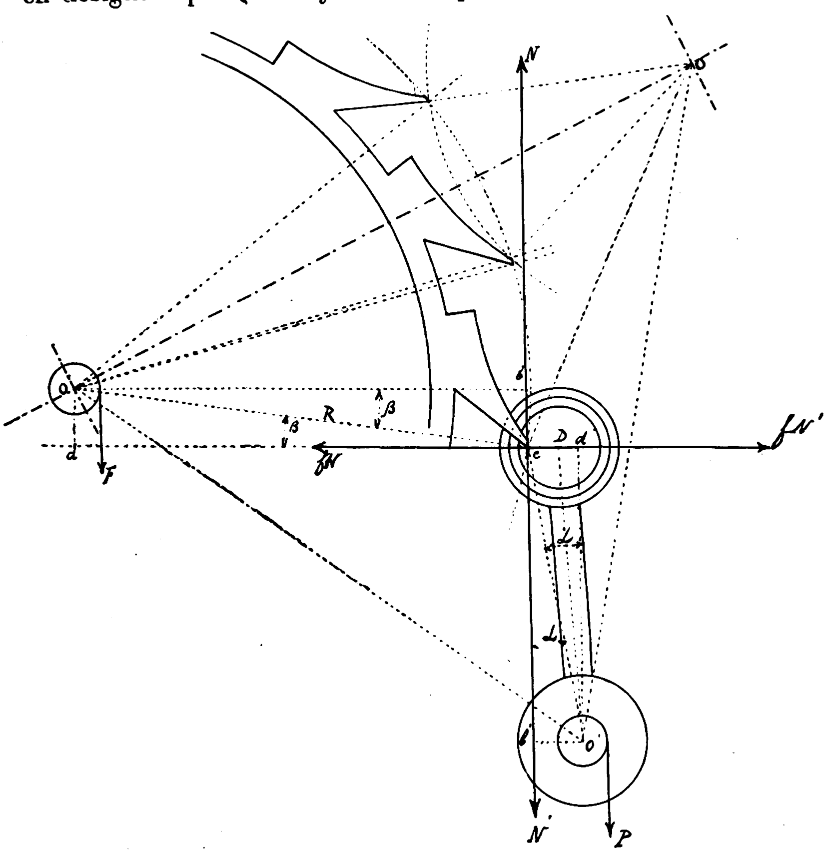


Fig. 156.

Enfin vient la force de frottement fN', dont le moment est

$$fN'.O'd' = fN'.\varrho\cos\alpha.$$

Nous posons donc

$$(2) \qquad P - N'.\varrho \sin \alpha + f N'.\varrho \cos \alpha = 0.$$

Divisant (2) par (1) il viendra :

$$\frac{P - N'.\varrho \sin \alpha + f N'.\varrho \cos \alpha}{F - NR.\cos \beta - f N.R \sin \beta} = 0.$$

Transposant et remarquant que $N = N'$, nous aurons

$$\frac{P}{F} = \frac{\varrho}{R} \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \beta + f \sin \beta}$$

et

$$(3) \qquad P = F \frac{\varrho}{R} \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \beta + f \sin \beta}.$$

599. — Nous pouvons premièrement observer que P est proportionnel à ϱ et inversement proportionnel à R, et ensuite que le numérateur de la fraction

$$\sin \alpha - f \cos \alpha$$

demeure positif aussi longtemps que

$$\sin \alpha > f \cos \alpha.$$

Comme, d'après les lois du frottement (346),

$$f = \text{tang } \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi},$$

nous posons :

$$\sin \alpha > \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos \alpha.$$

Ainsi ce numérateur devient zéro pour

$$\alpha = \varphi$$

et nous pourrons dire que, pour $\alpha < \varphi$, la bascule n'est plus attirée par la dent.

Par contre, si $\alpha > \varphi$, $\cos \alpha$ étant plus petit que $\cos \varphi$, ce numérateur reste positif.

600. — Nous avons donc à rechercher pour quel angle β le dénominateur

$$\cos \beta + f \sin \beta$$

devient valeur maxima.

Pour cela posons

$$y = \cos \beta + f \sin \beta.$$

La dérivée de cette fonction est

$$\frac{dy}{d\beta} = - \sin \beta + f \cos \beta,$$

et nous trouvons soit un maximum soit un minimum en égalant cette dérivée de 1er ordre à zéro. Donc

$$0 = - \sin \beta + f \cos \beta,$$

ou

$$\sin \beta = f \cos \beta,$$

ou encore

$$\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = f = \operatorname{tg} \beta.$$

Afin de reconnaître si nous avons ici un maximum ou un minimum, recherchons la dérivée du second ordre et posons

$$y' = - \sin \beta + f \cos \beta \;;$$

il viendra :

$$\frac{dy'}{d\beta} = \frac{d^2 y}{d\beta^2} = - \cos \beta - f \sin \beta.$$

Cette dérivée seconde étant négative pour un angle β compris entre 0 et 90°, nous aurons donc un maximum pour $\beta = 8^\circ\, 32'$ et un minimum pour $\beta = 188^\circ\, 32'$.

601. — **Moment de force nécessaire pour opérer le dégagement.** Dans ce cas le moment P devient moteur et le mouvement a lieu en sens contraire: le signe du frottement devra être changé dans l'équation (3), qui deviendra

$$(4)\quad P = F \frac{\varrho}{R} \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \beta - f \sin \beta}.$$

Nous remarquons que ce moment est d'autant plus fort que ϱ est grand, donc lorsque le repos est éloigné du centre de la bascule et qu'il est inversement proportionnel au rayon R de la roue; mais qu'en outre le travail nécessaire au dégagement ne dépend pas de la distance du centre de la bascule au centre du repos. Ce moment augmente avec α depuis 0 jusqu'à un angle α, dont la tangente est égale à f. Nous voyons donc que cet angle ne doit pas être exagéré.

602. — Nous avons encore à examiner le dénominateur

$$\cos \beta - f \sin \beta$$

et à en rechercher la valeur maxima.

Posons :

$$y = \cos \beta - f \sin \beta \; ;$$

il ressortira :

$$\frac{dy}{d\beta} = - \sin \beta - f \cos \beta \; ;$$

d'où

$$- \sin \beta = f \cos \beta$$

et

$$f = - \operatorname{tg} \beta$$

Prenant maintenant la dérivée du second ordre

$$y' = - \sin \beta - f \cos \beta \; ;$$

$$\frac{dy'}{d\beta} = \frac{d^2 y}{d\beta^2} = - \cos \beta + f \sin \beta.$$

Cette dérivée seconde est négative pour un angle compris entre 270 et 360° ; donc

$$f = - \operatorname{tg} \beta,$$

où

$$\beta = 351^\circ \, 28'.$$

603. — Nous pouvons conclure de ce qui précède, que la meilleure disposition pour la direction du repos, en vue de rendre le dégagement le plus facile, est de lui donner une inclinaison sur le rayon de la roue égale à l'angle du frottement, donc à 8° 32′. De plus nous avons vu qu'il ne faut pas exagérer l'angle α.

En étudiant l'équation (3) nous voyons que la force avec laquelle la bascule est attirée contre la paroi, est nulle pour $\alpha = \varphi$; mais en songeant que la détente est encore sollicitée par la force élastique d'un spiral ou, suivant le cas, d'un ressort, on voit que la valeur absolue

$$\alpha = \varphi = 8^\circ \, 32'$$

est bien suffisante. En effet la plus petite force exercée par ce spiral ou ce ressort ramène déjà la détente contre son point d'appui.

Remarquons aussi que, si le dénominateur de la fraction (équation 3) est loin d'atteindre sa valeur minimum, elle n'est pas à son maximum, non plus.

604. — Le calcul numérique de l'équation (3) donne pour

$$R = 3{,}899784, \qquad F = 1,$$
$$\varrho = 2{,}561515, \qquad \beta = 8^{\circ}\,32',$$

le résultat suivant :

$$P = 0{,}25772 \text{ gr.}$$

pour un angle de $360^{\circ} - 8^{\circ}\,32'$.

Nous aurons aussi le travail

$$\text{Tr. } P = 0{,}0075459 \text{ gr. mm.}$$

pour

$$F = 1 \text{ gr.}$$

Distance entre les centres de la roue et de la bascule.

605. — Appelons D la distance du centre de la roué à celui du balancier, D′ la distance du centre de la bascule à celui du balancier et R le rayon de la roue. Les centres du mouvement sont représentés par O″ pour la roue, O′ pour la bascule et O pour le balancier.

L'angle $cO''O$ devra être égal (fig. 156) à

$$(1) \qquad 24^{\circ} + 0^{\circ}30 + 11^{\circ}\,45' = 36^{\circ}\,15'$$

et l'angle $O'cO''$ à

$$(2) \qquad 90^{\circ} + 2\,\varphi = 107^{\circ}\,4',$$

φ étant de $8^{\circ}\,32'$ pour $f = 0{,}15$.

Nous avons donc à déterminer la longueur de la droite O″O′. Dans le triangle O″ O O′, cette valeur doit avoir pour expression

$$(3) \qquad O''O' = \sqrt{D^2 + D'^2 - 2\,DD' \cos O''OO'}$$

L'angle O″OO′ étant encore inconnu, doit être déterminé. Nous avons (fig. 156).

$$(4) \qquad \text{angle } O''OO' = \text{angle } O''Oc + \text{angle } O'Oc$$

Dans le triangle $O''cO$, nous avons :

Angle $O''Oc = 180^o$ — angle $OO''c$ — angle OcO''.

L'angle $OO''c$ nous est connu par (1) et l'angle OcO'' le deviendra par l'équation

$$(5) \qquad \text{tang}\ OcO'' = \frac{D.\sin OO''c}{D.\cos OO''c - R}.\ (*)$$

Comme nous avions d'autre part (591)

$$R = \frac{D \sin \gamma}{\sin \gamma + \beta} = D\frac{\sin 20^0}{\sin 31^o\ 45'},$$

nous aurons encore

$$(6) \qquad tg.\ OcO'' = \frac{\sin OO''c}{\cos OO''c - \dfrac{\sin \gamma}{\sin (\gamma + \beta)}}.$$

Les équations (1) et (6) nous permettront donc de déterminer l'angle $OO''c$ et il nous reste à chercher la valeur de l'angle $O'Oc$, qui, ajoutée à la précédente, nous donne la valeur de l'angle $O''OO'$.

Nous avons :

angle $O'Oc = 180^o$ — angle OcO' — angle $OO'c$,

* En effet dans tout triangle tel que (Fig. 157) $OO''c$, on a

$$\text{tang.}\ c = \frac{y}{x - R}.$$

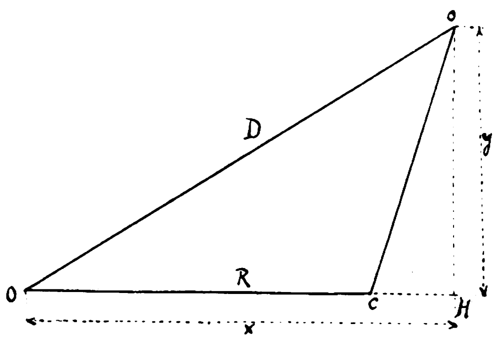


Fig. 157.

Remplaçons y et x par leur valeur,

$$y = D.\sin OO''c,$$
$$x = D.\cos OO''c.$$

Il vient

$$tg\ OcO'' = \frac{D \sin OO''c}{D \cos OO''c - R}.$$

équation dans laquelle l'angle

$$OcO' = 360^\circ - OcO'' - O'cO'' ;$$

les angles OcO'' et $O'cO''$ nous sont donnés par (6) et (2).

D'autre part nous avons :

$$\sin OO'c = \frac{Oc \sin OcO'}{D'}$$

et

$$Oc = D \frac{\sin OO''c}{\sin OcO''},$$

d'où

$$(7) \qquad \sin OO'c = \frac{D \dfrac{\sin OO''c}{\sin OcO''} \sin OcO'}{D'}.$$

Connaissant donc les angles OcO' et $OO'c$, l'angle $O'Oc$ est déterminé.

Nous aurons ainsi la somme générale de (4)

$$O''OO' = 180^\circ - OO''c - OcO'' + 180^\circ - 360^\circ + OcO'' + O'cO'' - OO'c.$$

En simplifiant, il viendra

$$(8) \qquad O''OO' = O'cO'' - OO''c - OO'c.$$

Connaissant cet angle $O''OO'$, on pourra donc soumettre au calcul l'équation (3).

606. — Pour échappement avec courte bascule, on a

$$D = D'.$$

Admettons

$$D = D' = 1 ;$$

l'équation (3) devient

$$(9) \qquad O''O' = \sqrt{2 (1 - \cos O'OO'')} ;$$

l'équation (8) donne pour

$$\begin{array}{rll} O'cO'' &= 107^\circ\, 4' & (2) \\ - OO''c &= 36^\circ\, 15' & (1) \\ - OO'c &= 18^\circ\, 51'\, 8'' & (7) \\ \hline \text{Angle } O''OO' &= 51^\circ\, 57'\, 52''. & \end{array}$$

Enfin on arrive à la valeur

$$O''O' = 0{,}8762$$

pour $D = 1$

607. — En multipliant cette valeur O″O′ par la distance D des centres du balancier à la roue d'échappement on trouvera la valeur réelle.

608. — Lorsque D′ n'est pas égal à D, il faut remplacer dans (3) D et D′ par leurs valeurs respectives et, dans le cas où R n'aurait pas exactement la valeur que nous lui avons attribuée, refaire tout le calcul.

Calcul de la distance du centre de la bascule au centre du repos.

609. — Calculons d'abord (fig. 158), la distance ϱ du point c de contact de la dent sur le repos au centre de la bascule ;

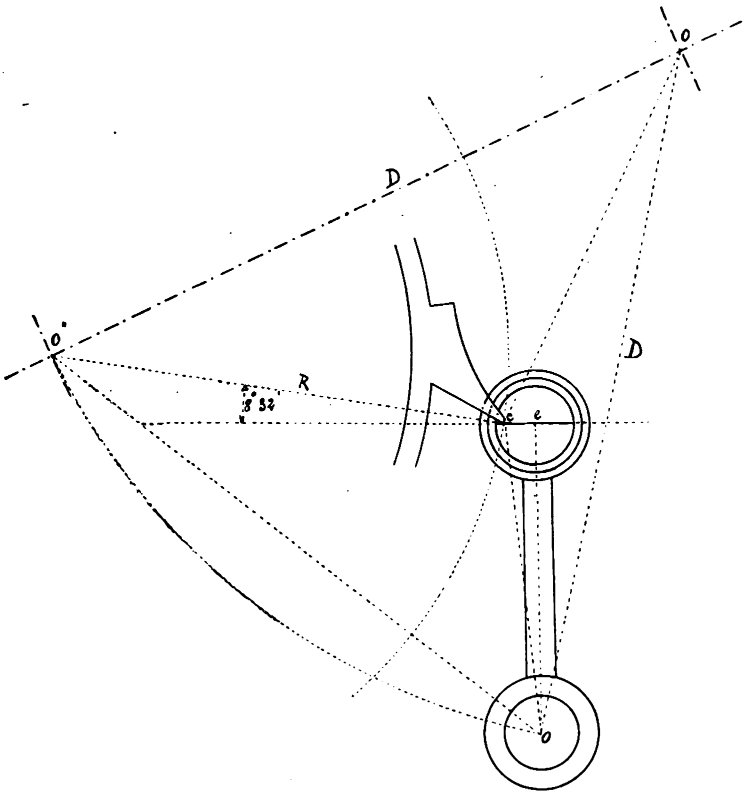


Fig. 158.

nous aurons, dans le triangle OcO', la relation

$$\varrho = D\frac{\sin cOO'}{\sin OcO'} = D\frac{\sin 13^\circ\, 2'\, 13''}{\sin 148^\circ\, 6'\, 39''};$$

d'où

$$\varrho = 0{,}426919$$

pour $D = 1$. Pour $D = 6$, nous aurions

$$\varrho = 0{,}426919 \times 6 = 2{,}561514.$$

Appelons r le rayon de la pierre du repos; nous trouverons la distance du point de contact au centre en soustrayant de r, la longueur linéaire du repos. Désignons par b cette distance, nous aurons

$$(10) \qquad O'e = \sqrt{\varrho^2 + b^2 - 2\, b\varrho \cos 81^\circ\, 28'},$$

l'angle $e\,c\,O'$ étant en effet

$$\sphericalangle\, ecO' = 90^\circ - \varphi = 90^\circ - 8^\circ\, 32' = 81^\circ\, 28'.$$

610. — En pratique, nous pouvons admettre le rayon du repos de

$$0{,}24\ {}^{m}/_{m},$$

et la longueur linéaire de repos de la dent de

$$0{,}075,$$

ce qui donne

$$b = 0{,}24 - 0{,}075 = 0{,}165\ {}^{m}/_{m}$$

pour une distance des centres

$$D = 6\ {}^{m}/_{m}.$$

Pour

$$D = 1,$$

nous aurions

$$b = \frac{0{,}165}{6} = 0{,}0275.$$

Le calcul de l'équation (10) donne pour la distance cherchée

$$O'e = 0{,}423281$$

avec $D = 1$, et

$$O'e = 0{,}423281 \times 6 = 2{,}539686$$

pour une distance de

$$D = 6\ {}^{m}/_{m}.$$

Position de rencontre de la dent de la roue avec la grande levée.

611. — Nous avons établi que la chute de la dent d'entrée sur la grande levée est réglée par l'angle formé par les directions des faces planes des deux levées (592). En faisant tourner le balancier lentement, cette chute doit être aussi faible que possible, à condition que la dent atteigne la levée et ne tombe pas dans l'arrière-partie de la forme en feuille de sauge du grand plateau. Nous en avons déterminé la valeur minimum.

Cette chute augmente assez considérablement lorsque la montre marche; car, à l'instant où la dent est laissée libre par l'écartement du repos, le balancier est animé de sa plus grande vitesse, tandis que la roue part avec une vitesse égale à zéro. Le balancier parcourt ainsi un certain chemin jusqu'à l'instant où il reçoit le choc de la dent et il est évident que cette valeur est supérieure à celle que l'on peut mesurer en le conduisant lentement à la main. Il s'agit donc de déterminer cet angle.

Nous nous trouvons ici en face d'une question analogue à celle qui se présente dans le problème classique des deux courriers, avec la différence pourtant que, dans ce dernier, les courriers sont animés d'un mouvement uniforme, tandis que dans notre cas la roue d'échappement, étant sollicitée par une force constante provenant du ressort du barillet, prend un mouvement uniformément accéléré.

Nous aurons ainsi à déterminer, pour chaque mobile, le temps en fonction de l'angle parcouru et, en posant l'égalité de ces temps, on trouvera la position cherchée, c'est-à-dire la valeur de l'angle parcouru par le balancier jusqu'à l'instant de la rencontre des deux mobiles.

Nous déterminerons cet angle à partir de la position dans laquelle se trouve la grande levée au moment où la dent se trouve dégagée du repos. Pendant ce parcours, le balancier est animé de sa plus grande vitesse et nous pouvons admettre,

sans erreur appréciable, que cette vitesse est constante entre ces limites.

Nous établirons dans la théorie du réglage la formule permettant de calculer la vitesse du balancier à un instant quelconque de son mouvement. Nous représenterons cette vitesse angulaire par ω et admettrons pour le moment la valeur

$$\omega = \alpha_0 \sqrt{\frac{M}{A}} = \alpha_0 \frac{\pi}{T},$$

dans laquelle α_0 est l'angle dont le balancier a été écarté de sa position de repos jusqu'au commencement de son oscillation; c'est donc l'angle de la demi-oscillation. Ainsi, pour une montre dont le balancier exécute un tour et demi à chaque oscillation, nous aurons

$$\alpha_0 = \frac{1,5}{2} \text{ tour} = 1,5\,\pi = 4,7124;$$

T est la durée de l'oscillation complète, soit, pour une montre dont le balancier exécute 18,000 oscillations par heure,

$$T = \frac{60 \times 60}{18000} = 0,^{s}2.$$

M représente le moment d'élasticité du spiral et A le moment d'inertie du balancier. Ces valeurs sont ici inutiles, puisque la formule de la durée d'une oscillation du balancier, $T = \pi\sqrt{\frac{A}{M}}$, permet de poser l'égalité des rapports

$$\sqrt{\frac{M}{A}} = \frac{\pi}{T} = \frac{3,1416.}{0,2}$$

La vitesse angulaire ω du balancier aura donc pour valeur, pendant la période de mouvement considérée,

$$\omega = 4,7124 \times \frac{3,1416}{0,2} = 74,022 \ {}^{m}/_{m}.$$

Cette valeur signifie qu'un point du balancier situé à la distance de 1 mm. de l'axe parcourrait un chemin de 74,... mm.

pendant une seconde s'il conservait pendant ce temps cette même vitesse*.

Sachant que dans le mouvement uniforme, le temps t est déterminé par le quotient de l'espace par la vitesse,

$$t = \frac{e}{v},$$

on aura, en remplaçant les valeurs linéaires e et v par nos valeurs angulaires α et ω,

$$(1) \qquad t = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{\alpha}{74{,}022}.$$

On obtient ainsi le temps employé par le balancier pour parcourir un angle α. Nous aurons maintenant à procéder de même pour la roue, c'est-à-dire à rechercher le temps t que cette roue emploie à parcourir l'angle α' à partir du point où sa vitesse est nulle jusqu'à l'instant de la rencontre des deux mobiles.

Une des lois fondamentales de mécanique enseigne que l'accélération que prend un corps soumis à l'action d'une force constante, est égale au quotient de cette force par la masse du corps en mouvement; donc

$$j = \frac{F}{m}.$$

On a également les formules générales

$$v = jt = \frac{F}{m}\, t$$

et

$$e = \frac{1}{2}\, jt^2 = \frac{1}{2}\, \frac{F}{m}\, t^2.$$

Cette dernière formule nous donne

$$t = \sqrt{\frac{2\, e\, m}{F}}.$$

* On peut se rendre mieux compte encore de ce que cette valeur représente en calculant le nombre de tours que ferait en une seconde un volant animé de cette vitesse, puisqu'un tour représente un chemin $2\pi = 6{,}2832$, donc

$$\frac{74{,}022}{6{,}2832} = 11{,}78 \text{ tours par seconde},$$

on

$$11{,}78 \times 60 = 706{,}8 \text{ tours par minute.}$$

Remplaçons maintenant l'espace e par l'angle α' parcouru par la roue, la masse m par le moment d'inertie A' de cette roue et la force F par le moment M' de la force agissant sur ce mobile, nous aurons

$$(2) \qquad t' = \sqrt{2\,\alpha'\,\frac{A'}{M'}}.$$

En égalant les valeurs de t et de t', on obtient

$$\frac{\alpha}{\omega} = \sqrt{2\,\alpha'\,\frac{A'}{M'}}.$$

Multipliant par ω et élevant au carré, on a

$$(3) \qquad \alpha^2 = 2\,\omega^2\,\alpha'\,\frac{A'}{M'}.$$

Cette équation contient encore deux inconnues, soit α et α'; mais nous pouvons en éliminer une en remarquant que, pendant que le balancier parcourt 40°. la roue en parcourt 24; donc

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5},$$

d'où

$$\alpha' = \frac{3}{5}\,\alpha.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (3), il vient

$$\alpha^2 = \frac{6\,\omega^2\,\alpha}{5}\;\frac{A'}{M'}$$

ou enfin

$$(4) \qquad \alpha = 1{,}2\,\frac{A'}{M'}\,\omega^2.$$

612. — *Calcul numérique de la formule précédente.* — Le moment d'inertie de la roue d'échappement est représenté par

$$A' = \frac{P}{g}\,R^2.$$

P = poids de la roue; g = accélération de la pesanteur; R = rayon de giration. Admettons

P = 0,04 gr., R = 3 mm., g = 9808 mm, M' = 1,5 gr.

Nous aurons

$$\alpha = \frac{1{,}2 \times 0{,}04 \times 9 \times 74{,}022^2}{9808 \times 1{,}5} = 0{,}160876.$$

Cette valeur de α est représentée par la longueur d'un arc de cercle de rayon égal à l'unité; pour avoir la valeur de l'angle correspondant, on remarque

$$\text{la circonférence} = 360^\circ = 2\,\pi = 6{,}2832\,;$$

par suite on a la proportion

$$\frac{6{,}2832}{0{,}1609} = \frac{360}{x},$$

d'où

$$x = \frac{360 \times 0{,}1609}{6{,}2832} = 9^\circ\ 13'.$$

Le balancier parcourt donc un angle de 9° 13′ à partir de la position occupée par la grande levée à l'instant où la dent quitte le repos jusqu'à la position de rencontre de la dent d'entrée avec cette levée.

L'angle parcouru par la roue d'échappement pendant cette course sera égal à

$$\alpha' = {}^{3}/_{5} \times 9^\circ\ 13' = 5^\circ\ 31'\ 48''.$$

On peut ainsi constater que la chute réelle de la roue est de

$$5^\circ\ 31'\ 48''$$

supérieure à celle que l'on obtient en conduisant lentement le balancier avec la main (592).

Faisons remarquer encore que la roue doit être très légère afin qu'elle se mette en mouvement le plus rapidement possible au moment du dégagement.

Position et longueur du ressort en or.

613. — La position du ressort en or doit être telle que la pénétration des circonférences décrites par les extrémités de la petite levée et de ce ressort soit suffisante sans que cependant la longueur des arcs qui se pénètrent, soit elle-même trop grande.

614. — Rendons cette donnée plus claire en nous servant des deux figures (159 et 160). Le ressort peut être placé indifféremment des deux manières représentées ci-dessous,

c'est-à-dire à gauche (fig. 160) ou à droite (fig. 159) de la bascule.

A la seule inspection de ces dessins, nous remarquons aisément que l'arc *a b* est plus long dans la figure 160 que dans l'autre, quoique toutes deux aient à peu près la même pénétration de ressort en or dans la circonférence décrite par la pointe de la petite levée. La première disposition serait donc préférable.

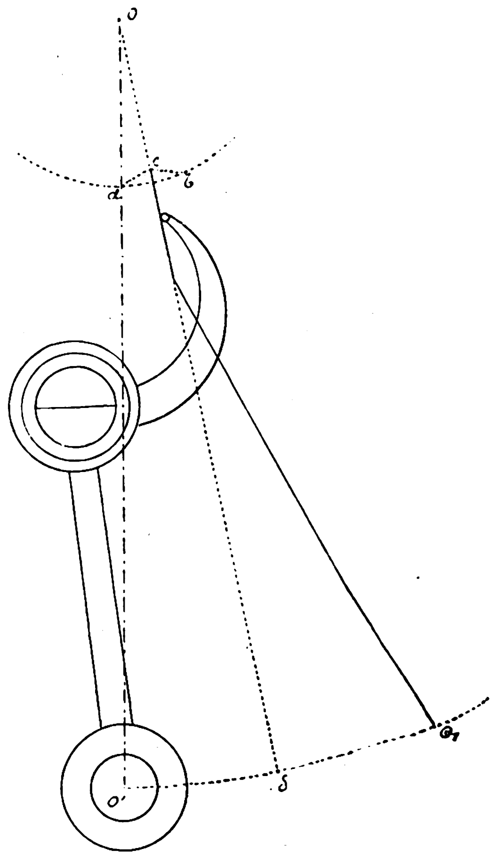


Fig. 159.

Nous constatons en effet que, lorsque le balancier est animé d'un mouvement de gauche à droite, la pointe du ressort décrit, pendant son contact avec la levée, les arcs de cercle *c b*, dont les centres se trouvent sur l'axe de la détente; tandis qu'au contraire, lorsque le balancier a un mouvement en sens inverse, la pointe du ressort décrit les arcs *c a*, dont les centres sont en O_1, centres de flexion des ressorts. C'est la différence de position de ces derniers centres avec les premiers qui fait que les arcs *acb* sont de longueurs différentes.

615. — L'extrémité du ressort en or doit être placée de façon qu'à la position de repos de la bascule elle pénètre le plus profondément dans la circonférence de la levée; ce fait se produit lorsque les deux arcs *ac* et *cb* sont égaux et lorsque leur intersection se trouve sur la bissectrice de l'angle $O'OO_1$; à moins pourtant que les longueurs CO_1 et CO ne soient très différentes l'une de l'autre.

616. — La longueur des arcs *cb* doit être suffisante pour que le dégagement de la dent au repos puisse s'opérer avec sécurité.

Causes qui font que l'échappement ne tient pas le repos.

617. — Il arrive parfois que, lorsque la dent de la roue d'échappement abandonne la grande levée, le repos ne se trouve pas encore revenu en place pour recevoir la dent suivante. Cette dent dépasse alors la position d'arrêt et celle d'entrée vient tomber sur le bord extérieur du grand plateau. Au retour du balancier, la dent d'entrée tombe d'abord sur la levée, qui la repousse un peu en arrière, puis dans l'intérieur de l'arrière-partie de la forme arrondie en feuille de sauge du plateau. Lorsque le balancier revient de nouveau sur lui-même, il s'échappe en général deux dents.

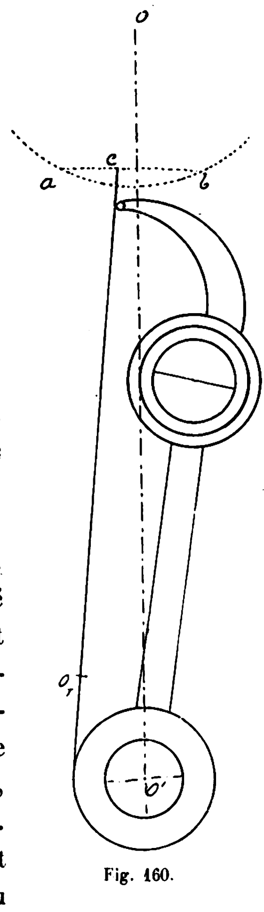


Fig. 160.

On dit, lorsque ce défaut se produit, que l'échappement ne tient pas le repos.

618. — La cause de cette irrégularité résidant dans le fait que la détente n'est pas revenue assez tôt à sa position d'arrêt, il faut, pour y remédier, examiner d'abord si la petite levée n'entraîne pas la bascule trop loin et, si c'est le cas, diminuer la longueur du ressort en or.

619. — Si cette opération ne suffisait pas encore pour assurer les fonctions du repos, il faudrait alors armer un peu plus le spiral de la bascule.

620. — Il est aisé aussi d'éviter ce défaut en s'arrangeant de façon que le moment d'inertie de la bascule devienne aussi faible que possible, en la rendant donc très légère.

Position de repos du spiral réglant par rapport à l'échappement à détente.

621. — Cette position n'est pas déterminée aussi naturellement pour cet échappement que pour l'échappement à ancre.

D'abord, par sa construction même, un échappement à détente ne peut jamais se mettre de lui-même en marche lorsqu'on a remonté le ressort moteur de la montre ; on est obligé de donner au balancier une première impulsion en imprimant à tout le système un mouvement de rotation.

622. — La position de repos du spiral doit être telle qu'un très petit mouvement de rotation suffise déjà pour mettre le chronomètre en marche.

623. — Lorsque cette impulsion initiale, nécessaire pour faire dépasser le ressort en or à la petite levée, doit être trop considérable, il faut alors faire tourner la virole du spiral de façon à rapprocher la petite levée du ressort en or.

624. — Par contre, si cette impulsion, tout en faisant facilement dépasser le ressort en or à la petite levée, ne suffit pas pour écarter le balancier de sa position de repos d'un arc assez grand pour que la force élastique du spiral puisse entraîner la bascule et dégager la dent, le balancier s'arrête alors au retour et, dans ce cas, le spiral est placé de telle façon que la petite levée est trop rapprochée du ressort en or. Il faudra alors faire mouvoir la virole en sens contraire du cas précédent.

625. — Remarquons que, lorsqu'on fait tourner la virole sur le balancier, la durée des oscillations subit un changement.

En outre, on peut ajouter que la régularité de marche d'un chronomètre dépend d'une position bien choisie de la petite levée au repos du balancier.

Les régleurs tâtonnent toujours un peu en cette occurence, à cause des différences existant entre les divers échappements à détente, spécialement entre les forces variables des spiraux ou ressorts d'échappement et des ressorts en or.

CHAPITRE X

THÉORIE DU RÉGLAGE

INTRODUCTION

626. — Les calculs du rouage nous ont permis de déterminer le nombre d'oscillations exécuté par le balancier pendant un temps donné et de spécifier par suite leur durée. Ainsi une montre réglée dont le balancier exécute 18000 oscillations par heure, en fait 300 par minute, ou 5 par seconde ; la durée d'une oscillation est dans ce cas de $0^s,2$. Si cette durée demeurait invariable, la marche de la montre serait parfaite, puisque toutes les 5 oscillations l'aiguille de secondes marquerait la seconde, toutes les 300 oscillations l'aiguille de minutes marquerait la minute et toutes les 18000 oscillations l'aiguille d'heures marquerait l'heure astronomique sur le cadran : la division du temps serait mathématiquement exacte. Il en est toutefois des instruments chronométriques comme des autres instruments de mesure : on peut s'approcher de mieux en mieux de l'exactitude absolue sans jamais arriver à l'atteindre, car de multiples influences inhérentes ou extérieures au mécanisme produisent des perturbations de marche dans le sens d'une accélération ou d'un ralentissement de la vitesse du balancier. On observera par le fait une *avance* ou un *retard* de la marche de la montre. Si ces influences étaient constantes, leur effet pourrait être neutralisé ; mais

on peut constater, par la marche du meilleur chronomètre dans diverses positions et dans diverses températures, qu'elles sont au contraire variables dans certaines limites. Nous pouvons déjà supposer que ces influences agissant les unes dans le sens d'une accélération, les autres dans le sens d'un ralentissement de la vitesse du balancier, compensent partiellement entre elles leurs effets, en constatant que les meilleures montres modernes accusent des différences de marche très réduites d'un jour à l'autre. Si la variation moyenne des marches d'un chronomètre était de $0^s,5$ en 24 heures, il est facile de voir que la somme des influences qui produisent cette variation, augmente ou diminue la durée normale d'une oscillation ($0^s,2$) d'environ $0^s,000001$, un millionième de seconde en valeur moyenne ; c'est une bien petite quantité et pourtant une variation moyenne de $0^s,5$ d'un jour à l'autre est actuellement considérée comme assez forte.

627. — **La Théorie du Réglage** a pour but la détermination de la durée d'une oscillation du balancier ou du pendule. Elle comprend par suite l'analyse des diverses influences qui tendent à modifier cette durée.

Nous nous occuperons en première ligne du *balancier* et du *spiral* et traiterons la question du *pendule* pour elle-même dans un chapitre spécial.

S'il s'agissait d'envisager le problème de la détermination de la durée d'une oscillation du balancier dans son ensemble, en tenant compte de l'effet des influences simultanées qui contribuent à modifier cette durée, nous rencontrerions de nombreuses complications et éprouverions de grandes difficultés. Il sera plus simple de considérer d'abord le système placé dans un milieu de température constante et de commencer par l'étude du mouvement du balancier sollicité par la seule force du spiral.

Successivement on examinera ensuite l'effet produit par les résistances passives, telles que les frottements des pivots du balancier, les frottements entre les molécules du spiral pendant son développement, la résistance de l'air. Nous intro-

duirons ensuite les perturbations produites par le fonctionnement de l'échappement pendant son action sur le balancier, action qui a pour but de lui restituer la force vive que lui ont fait perdre les diverses résistances passives pendant le mouvement. Puis nous étudierons l'effet de la force centrifuge sur le balancier compensateur.

Après ces préliminaires, nous aborderons la question du réglage du « plat au pendu » en tenant compte, à côté des cas précédents, de l'équilibre du balancier et du spiral, ainsi que de l'équilibre de l'ancre et de la fourchette.

Nous passerons ensuite aux études plus compliquées, relatives aux courbes terminales des spiraux (théorie de Phillips sur le spiral réglant, effet de l'inertie des molécules du spiral, moment d'inertie du balancier, etc.)

Enfin viendra l'étude de la compensation des effets produits par les variations de la température sur la marche de la montre.

Faisons encore remarquer que, dans la marche d'une montre, toutes les causes de perturbation agissent ensemble et que l'une d'elles peut influer sur l'autre.

Mouvement du balancier. — Durée d'une oscillation d'un balancier muni de son spiral.

629. — Le mouvement d'un balancier est un mouvement de rotation. Nous ne pouvons donc introduire les forces et les masses, dans les équations relatives à ce mouvement, aussi simplement qu'on peut le faire dans le mouvement de translation rectiligne. Au lieu des forces, il faut introduire leur *moment* et, au lieu des masses, il faut considérer les *moments d'inertie* des corps.

Rappelons d'abord le principe des moments de forces.

Le moment d'une force par rapport à un centre est le produit de cette force par son bras de levier. — Le bras de levier est la longueur de la perpendiculaire abaissée du centre de mouvement sur la direction de la force (42).

Nous exprimerons, comme nous l'avons fait jusqu'ici, les forces en *grammes* et les longueurs en *millimètres*. Les moments de forces, produits de grammes par des millimètres, seront représentés par l'abréviation « mmgr. ». Si, par exemple, une force de 8 gr. agit à l'extrémité d'un bras de levier de 3 mm., le moment de cette force sera 24 mmgr. Ce qui équivaut à dire que cette force de 8 gr. produit, à 3 mm. de distance de l'axe, le même effet qu'une force de 24 gr. à l'unité de distance de cet axe. On ramène ainsi la force à l'unité de distance du centre de rotation et, de cette manière, on peut l'exprimer par un seul chiffre.

630. **Moment de la force du spiral.** — Pour déterminer expérimentalement le moment de la force d'un spiral, ajustons au balancier une fine goupille entaillée *a* (fig. 161) et ramenons le centre de gravité du balancier sur l'axe en ajoutant une quantité de poids équivalente à l'autre extrémité du diamètre. Plaçons le balancier avec son spiral dans le mouvement de la montre et maintenons la platine dans une position verticale de façon que la droite O*a* soit horizontale. Faisons maintenant tourner le balancier d'un demi-tour, soit d'un angle de $180^o = \pi$. Le spiral exercera donc une certaine force tendant à ramener le balancier à sa position de repos. Fixons, dans cette position, un poids *p* à l'entaille *a* de la goupille et choisissons-le de façon qu'il maintienne le système en équilibre (fig. 162). L'action étant égale à la réaction, il en résulte que le moment F de la force du spiral sera pour cette position du balancier

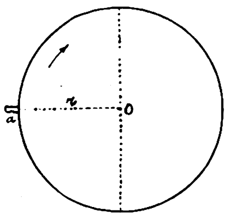


Fig. 161.

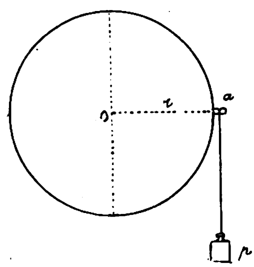


Fig. 162.

$$F = p . Oa.$$

Si nous faisons tourner le balancier encore d'un tour, soit $360^o = 2\pi$, il se trouvera écarté de sa position d'équilibre d'un angle égal à 3π et nous pourrons constater que le poids

nécessaire pour maintenir le système en équilibre sera, dans cette nouvelle position, égal à 3 p, soit

$$F = 3\,p.\,Oa.$$

Le moment de la force avec laquelle le spiral agit pour ramener le balancier à sa position de repos, est donc proportionnel à l'angle dont il en a été écarté.

En divisant le moment $p.O\,a$, obtenu par la première expérience, par l'angle d'écartement π, nous obtiendrons le moment M pour un angle égal à l'unité.

Donc

$$M = \frac{p.\,Oa.}{\pi}.$$

Pour un angle d'écartement quelconque α, nous aurons par suite

$$(1) \qquad F = M\,\alpha.$$

Remarquons que la proportionnalité du moment de la force du spiral à l'angle d'écartement du balancier de sa position de repos n'est parfaite que lorsque le spiral remplit certaines conditions qui seront exposées plus loin.

631. — Il ne sera pas inutile de rappeler ici que l'introduction des valeurs angulaires dans les calculs nécessite très souvent le remplacement des valeurs en degrés, minutes et secondes par les longueurs d'arcs correspondantes, le rayon choisi étant égal à l'unité. Ainsi on a

$$\text{la circonférence} = 360^\circ = 2\,\pi = 6{,}28318....$$

$$\text{la demi-circonférence} = 180^\circ = \pi = 3{,}14159....$$

$$\text{le quart de circonférence} = 90^\circ = \frac{\pi}{2} = 1{,}57079....$$

Un angle de 24°, par exemple, correspondra à une longueur d'arc donnée par

$$\text{arc } 24^\circ = \frac{3{,}1416 \times 24}{180} = 0{,}41888.$$

La longueur d'arc de 1° est égale à 0,017453.

Le *radian* (arc égal au rayon) vaut en degrés

$$57^\circ\ 17'\ 44'' = 206264''$$

Des tableaux, que l'on trouve souvent entre les tables de

logarithmes, donnent la conversion des degrés, minutes et secondes en longueurs d'arcs correspondantes, ce qui facilite les calculs.

632. **Moment d'inertie d'un corps animé d'un mouvement de rotation.** — En mécanique, on appelle *point matériel* un point d'un corps dont les dimensions sont supposées nulles, puisque c'est un point, mais possédant toutefois une certaine quantité de matière, donc une certaine *masse*.

Ainsi plusieurs points matériels peuvent avoir des masses différentes s'ils appartiennent à des corps de composition différente, tels que le laiton, l'acier, l'or, le liège, etc. En désignant la masse par m, le poids par p et l'accélération due à la force de la pesanteur par g, on a

$$m = \frac{p}{g}.$$

Considérons un point matériel de masse m, invariablement lié à un axe O (fig. 163) et ne pouvant se mouvoir qu'autour de cet axe en décrivant une circonférence de rayon r. Supposons que ce point soit sollicité par une force de moment F ; le corps prendra un mouvement accéléré de rotation. La force f reçue par le point m sera

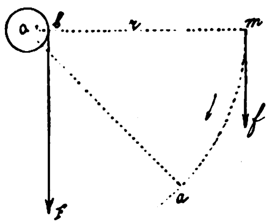


Fig. 163.

$$f = \frac{F}{r}.$$

633. — **L'accélération linéaire** j suivant l'arc décrit s'obtient en divisant la force $\frac{F}{r}$ par la masse m : donc

$$j = \frac{F}{mr}.$$

634. — **L'accélération angulaire,** c'est-à-dire l'accélération d'un point situé à l'unité de distance de l'axe, est r fois plus faible et on aura

$$J = \frac{F}{mr^2}.$$

Un corps ne peut être formé d'un seul point matériel; il en possède une infinité. Imaginons donc un deuxième point de masse m' dont la distance à l'axe soit r' et considérons-le comme invariablement lié au premier (fig. 164).

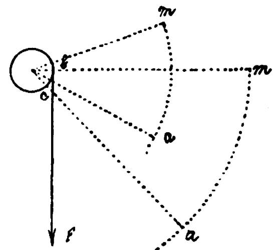


Fig. 164.

La force F agissant simultanémeut sur le système des deux points m et m', on aura l'accélération angulaire :

$$J = \frac{F}{mr^2 + m'r'^2}.$$

Pour une infinité de points matériels de masses $m, m', m'',$ $m''',$.... situés à des distances $r, r', r'', r''',$.... de l'axe, on aura de même

$$J = \frac{F}{mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + m'''r'''^2 + \ldots}.$$

Le dénominateur de cette fraction peut être mis sous la forme

$$\Sigma\, mr^2,$$

que l'on énonce « somme » de mr^2. On a donné à cette quantité le nom de *moment d'inertie* du corps ; elle sera représentée dans nos calculs par la lettre A.

En considérant cette quantité, nous voyons qu'elle peut être assimilée à une masse de même valeur reportée à l'unité de distance de l'axe ; cette masse offrira au mouvement la même résistance que les masses réelles et le corps fictif ainsi formé acquerra par l'action de la même force F une accélération égale à celle du corps auquel il a été substitué. Donc moment de force et moment d'inertie sont des valeurs ramenées à la même distance, celle de l'unité. De cette manière on pourra appliquer pour le mouvement de rotation les mêmes règles que dans l'étude du mouvement de translation rectiligne.

Si, par exemple, le corps considéré n'était formé que de

deux points matériels de masses $m = \frac{0,2}{g}$ et $m' = \frac{0,3}{g}$, et que la distance du premier à l'axe soit de 9 mm. et celle du second de 6 mm., nous aurions

$$A = \Sigma\, mr^2 = \frac{0,2}{g} \times 9 \times 9 + \frac{0,3}{g} \times 6 \times 6 = \frac{27}{g}.$$

On pourrait ainsi substituer au corps composé des deux points matériels indiqués un autre corps pesant 27 gr. réunis à une distance de 1 mm. de l'axe ; dans ce cas, une même force F, agissant également à l'unité de distance de l'axe, produira sur l'un comme sur l'autre corps une même accélération angulaire.

On peut encore envisager d'une autre façon le moment d'inertie d'un corps ; au lieu de supposer une masse différente ramenée à l'unité de distance, on peut considérer la masse réelle du corps placée tout entière à une distance moyenne R de l'axe en une sorte de cylindre creux d'écorce infiniment mince. Ce nouveau rayon, que l'on nomme *rayon de giration*, est donc une valeur particulière de r variable, telle que, si toute la matière du corps se trouvait à la distance R de l'axe de rotation, *l'énergie cinétique* et par suite le *moment d'inertie* n'auraient pas changé pour une même vitesse angulaire par rapport à cet axe.

Le moment d'inertie peut donc être représenté par la forme

$$(2) \qquad A = m R^2 = \frac{P}{g} R^2,$$

d'où l'on tire

$$R^2 = \frac{A}{m} = \frac{Ag}{P},$$

P étant le poids du corps.

Reprenons l'exemple précédent dans lequel nous avions

$Ag = 27$ gr. et $P = 0,2 + 0,3 = 0,5$ gr.,

on trouverait

$$R = \sqrt{\frac{27}{0,5}} = 7,34847...\ mm.$$

Comme un balancier est composé de diverses pièces de formes et de natures différentes, on comprend que le calcul numérique de son mouvement d'inertie soit une question compliquée [1].

Les formes des balanciers compensateurs restant à peu près les mêmes pour tous, on peut prendre, comme rayon de giration R, celui qui aboutit à la circonférence intérieure de la partie acier de la lame bimétallique, quand il ne s'agit pas d'une valeur devant avoir une exactitude absolue.

635. — Afin de donner une idée des différentes valeurs que nous venons de définir, nous prendrons comme exemple le balancier d'une montre de 43 mm (19 lignes) ; on aura dans ce cas

$P = 0{,}7091$ gr. $\qquad A = 0{,}0044332$

$R = 7{,}8312$ mm. $\qquad M = 1{,}009$ mmgr.

$T = 0^s{,}2 =$ durée d'une oscillation.

Pour un balancier de chronomètre de marine

$P = 10{,}35$ gr. $\qquad A = 0{,}27$

$R = 15{,}838$ mm. $\qquad M = 42{,}63$ mmgr.

$T = 0^s{,}25 =$ durée d'une oscillation.

636. **Distinction entre les termes « poids et masse » d'un corps.**— Ordinairement on dit que le poids d'un corps est égal au produit de son volume par sa densité. Cette définition serait inexacte car, si tel était le cas, le poids d'un corps serait le même au bord de la mer qu'au sommet d'une montagne, aux pôles qu'à l'équateur, sur la terre que sur la lune ou sur les étoiles.

En mécanique, on envisage le poids sous une forme différente : on dit que le poids d'un corps est égal à la force avec laquelle ce corps est attiré vers le centre de la terre ou vers un centre quelconque d'attraction. Cette force est la *gravité*.

Si l'on pèse un corps au moyen d'une balance à ressort sensible sur le sommet d'une montagne, puis au bord de la mer, on trouve que la balance accuse un poids plus grand au

[1] Nous donnons plus loin un exemple complet du calcul du moment d'inertie d'un balancier compensateur.

bord de la mer que sur la montagne. Dans l'étude des lois du mouvement, on considère le poids de cette façon et, comme c'est la force la plus simple à obtenir, on compare l'action de toutes les autres forces, de quelque provenance qu'elles puissent être, à la force du poids.

637. — On peut dire aussi que le poids d'un corps est la résultante de l'action de la force de la pesanteur sur les molécules qui composent ce corps. Le point d'application de cette résultante est le *centre de gravité* du corps.

638. — Les termes de *poids* et de *masse* sont très généralement envisagés comme synonymes, et pourtant ils correspondent à deux notions essentiellement distinctes. La masse est ce qui caractérise une quantité donnée de matière, ce qui ne varie pas dans cette dernière en quelque endroit de l'univers que le corps soit supposé transporté, à la condition de n'y rien ajouter et de n'en rien retrancher. La masse d'un corps étant une grandeur indépendante des conditions extérieures variables a pour cette raison été choisie comme troisième unité fondamentale du système de mesures absolues C. G. S. Le gramme-masse sera alors la millième partie de la masse du prototype international, le kilogramme-masse.

Une quantité de matière donnée, ayant ce que nous avons appelé une masse, est soumise comme telle à l'attraction de la terre. L'action qui en résulte, est ce que nous appelons le *poids* du corps. Si P est ce poids, m la masse du corps, g l'accélération de la pesanteur, on écrira

$$P = mg.$$

Nous savons que m est invariable. L'expérience a fait voir que la valeur de g n'est pas constante si l'on se transporte d'un lieu à un autre. Le *poids* P est donc *variable*. C'est là ce qui le distingue de la masse. Ainsi, le produit du volume V par la densité d, Vd, d'un corps ne représente pas son poids P, mais bien sa masse m, invariable comme le sont V et d dans des conditions identiques de température et de pression. En sorte que l'on pourra poser

$$P = mg = Vdg,$$

relation qui fait connaître le poids d'un corps dont on connaît la masse. Remarquons du reste que si la température ou la pression venait à changer, le volume varierait, la densité aussi. Mais, comme ces grandeurs varient en sens inverse l'une de l'autre, leur produit m ne variera pas, ce que nous avons précisément admis.

639. — Si la même masse m était soumise à l'action d'une accélération j, son poids serait F et nous pourrions écrire encore

$$F = mj.$$

On en tire

$$M = \frac{F}{j}.$$

Les définitions et les expressions précédentes ont un sens tant que g ou j, et par suite P et F, sont différents de zéro. Si l'accélération et le poids s'annulaient, m prendrait la forme

$$m = \frac{0}{0},$$

expression qui ne nous apprend rien, car elle n'a plus de sens. Strictement interprétée, elle conduirait à admettre que m est, dans ce cas, indéterminée. Or nous savons que la masse correspondant à une quantité de matière déterminée est elle-même parfaitement définie et fixe. Notre formule exprimerait donc un pur non-sens.

640. — Les unités adoptées en horlogerie étant le gramme pour les forces et le millimètre pour les longueurs, nous devrons exprimer g en millimètres. Cette valeur sera :

à l'équateur	$g = 9781{,}03$ m/m
à 45° de latitude	$g = 9806{,}56$ m/m
aux pôles	$g = 9831{,}09$ m/m

641. **Recherche théorique du moment de la force d'un spiral.** — Pour déterminer le moment de la force du spiral par le moyen du calcul, nous nous reporterons à la formule déterminée pour le moment de la force du ressort de barillet (I-86).

Nous avions (96) :

$$F = \frac{1}{12} \frac{E h e^3}{L} \alpha.$$

Si nous posons

$$\text{(3)} \qquad \frac{E h e^3}{12 L} = M,$$

nous retrouvons la formule (1)

$$F = M \alpha.$$

Nous remarquons que cette valeur est indépendante du rayon de courbure du spiral, c'est-à-dire de la distance du point d'attache du spiral à la virole au centre de l'axe, ainsi que de la forme générale du spiral.

642. **Vitesse angulaire du balancier.** — La *vitesse angulaire* d'un corps animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe est la vitesse d'un point situé à l'unité de distance de cet axe. Si v représente la *vitesse linéaire* d'un point situé à l'extérieur d'un balancier et que r représente le rayon de la circonférence décrite par ce point, on aura, en représentant la vitesse angulaire par ω,

$$\omega = \frac{v}{r}, \text{ d'où } v = \omega r.$$

Pour déterminer la vitesse angulaire du balancier à un instant donné, il faut d'abord rechercher la valeur de l'accélération. Nous avons déjà mentionné la loi fondamentale mécanique qui indique la relation existant entre l'accélération j et la force F, qui agit sur un corps de masse m (639), donc

$$j = \frac{F}{m}.$$

Dans le cas du mouvement du balancier, nous devons remplacer j par J, F par $M\alpha$, et m par le moment d'inertie A.

643. — La fig. 165 représente un balancier ; le point H est à la position de repos, c'est-à-dire qu'en cette position le spiral n'exerce aucune action sur le balancier. Si, par exemple, nous écartons le point H de cette position dans le sens indiqué par la flèche, le spiral agit en sens contraire du mouvement et tend à l'éteindre. Admettons que le point H du ba-

lancier ait été amené en D ; il se trouvera écarté de la position de repos d'un angle HOD, que nous désignerons par α. Cet angle est variable et nous conviendrons qu'il puisse prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et HOB ; désignons ce dernier angle par α_0. La vitesse du balancier sera nulle au point B, la force du spiral ayant éteint le mouvement en ce point extrême. Lorsque α augmente, le moment de la force du spiral agit en sens inverse du mouvement ; ce moment est par suite négatif et nous aurons

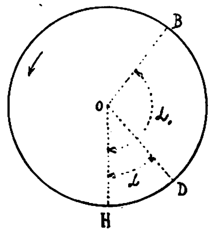


Fig. 165.

$$\text{(4)} \qquad J = -\frac{M\alpha}{A}.$$

Une accélération est la quantité dont varie la vitesse pendant l'unité de temps ; elle est le quotient de son accroissement de vitesse par l'accroissement de temps. Comme, dans le cas qui nous occupe, l'accélération varie d'un instant à l'autre, il faut prendre le temps et l'accroissement de vitesse infiniment petits. En représentant le temps infiniment petit par dt, nous avons

$$\text{(5)} \qquad J = \frac{d\omega}{dt}.$$

Comme le temps t est égal au chemin parcouru divisé par la vitesse, on a aussi

$$\text{(6)} \qquad dt = \frac{d\alpha}{\omega},$$

ce qui donne, en remplaçant dt par sa valeur dans la formule (5),

$$\text{(7)} \qquad J = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega.d\omega}{d\alpha}.$$

On aura, par suite,

$$\frac{\omega.d\omega}{d\alpha} = -\frac{M\alpha}{A}$$

ou

$$\omega.d\omega = -\frac{M}{A}\,\alpha.\,d\alpha.$$

En intégrant les deux membres, nous trouvons la valeur de la vitesse angulaire w,

$$\int \omega . d\omega = -\frac{M}{A}\int \alpha . d\alpha$$

ou

$$(8) \qquad \omega^2 = -\frac{M}{A}\alpha^2 + C.$$

La vitesse est nulle pour $\alpha = \alpha_0$; par suite

$$0 = -\frac{M}{A}\alpha_0^2 + C$$

et

$$C = \frac{M}{A}\alpha_0^2.$$

Introduisant la valeur de cette constante dans (8), on a

$$\omega^2 = \frac{M}{A}\left(\alpha_0^2 - \alpha^2\right),$$

ou

$$(9) \qquad \omega = \sqrt{\frac{M}{A}\left(\alpha_0^2 - \alpha^2\right)}.$$

Cette valeur nous permet de calculer la vitesse angulaire du balancier à un instant quelconque du mouvement. Le maximum de cette vitesse a lieu pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire quand le balancier passe par sa position de repos. On a alors

$$(10) \qquad \omega = \alpha_0\sqrt{\frac{M}{A}}.$$

En prenant α positif lorsque le balancier s'éloigne de sa position de repos, comme l'indique la flèche (fig. 165), il faut soustraire α^2 de α_0^2 ; lorsque α est négatif, son carré est aussi positif et c'est donc de nouveau une soustraction.

644. — Si l'on voulait déterminer séparément les valeurs M et A, on éprouverait d'assez grandes difficultés ; leur rapport $\frac{M}{A}$, par contre, est facile à obtenir. La formule donnant la durée T d'une oscillation du balancier est

$$(11) \qquad T = \pi\sqrt{\frac{A}{M}},$$

de laquelle on peut tirer

$$(12) \qquad \sqrt{\frac{M}{A}} = \frac{\pi}{T}.$$

Pour une montre dont le balancier exécute 18000 oscillations par heure, on a $T = 0^s,2$, donc

$$\sqrt{\frac{M}{A}} = \frac{3,1416}{0,2} = 15,708.$$

Pour un chronomètre de marine dont le balancier exécute 14400 oscillations par heure, on a $T = 0^s,25$, d'où

$$\sqrt{\frac{M}{A}} = \frac{3,1416}{0,25} = 12,5664.$$

645. - La construction graphique de l'équation (9) est très simple; on peut donner à cette formule la forme

$$\omega = \alpha_0 \sqrt{\frac{M}{A}} - \alpha \sqrt{\frac{M}{A}}.$$

Supposons l'amplitude des oscillations du balancier égale à 1 ½ tour (540°) ; la valeur de α_0 sera

$$\alpha_0 = 1,5\ \pi = 4,7124$$

et, en prenant $T = 0^s,2$, on aura

$$\alpha_0 \sqrt{\frac{M}{A}} = 4,7124 \times 15,708 = 74,022.$$

Cette valeur représente la vitesse angulaire du balancier lorsqu'il passe par le point de repos. Il est important de se

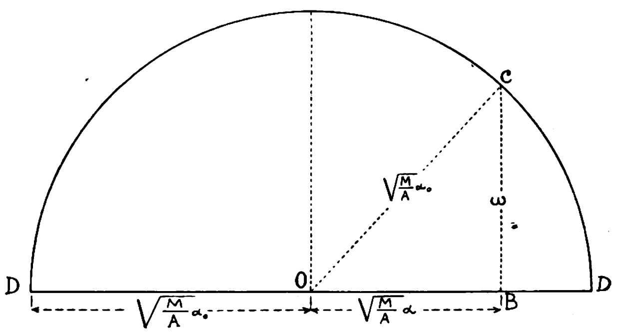


Fig. 166.

rendre d'abord bien compte de la signification de cette valeur 74,022. C'est le chemin que parcourrait en une seconde un

point situé à l'unité de distance de l'axe si, dès l'instant considéré, il continuait son mouvement avec une vitesse constante.

Décrivons maintenant avec ce rayon $\alpha_0 \sqrt{\frac{M}{A}} = 74{,}022 \ ^m/_m$

une demi-circonférence (Fig. 166) ; on supposera avoir rectifié ainsi le mouvement circulaire du balancier qui s'effectuera suivant la droite DOD. Partant du point O, le balancier parcourra le chemin $OD = \alpha_0 \sqrt{\frac{M}{A}}$; arrivé au point B, il aura parcouru le chemin $OB = \alpha \sqrt{\frac{M}{A}}$. Elevons la perpendiculaire BC ; le triangle OBC est rectangle et l'on aura

$$\overline{OC}^2 - \overline{OB}^2 = \overline{BC}^2$$

ou

$$\frac{M}{A}\alpha_0^2 - \frac{M}{A}\alpha^2 = \overline{BC}^2.$$

Mais, comme (9)

$$\omega^2 = \frac{M}{A}\left(\alpha_0^2 - \alpha^2\right),$$

nous aurons, par suite

$$\overline{BC}^2 = \omega^2 \text{ et } BC = \omega.$$

Ainsi la vitesse angulaire w sera représentée par l'ordonnée BC correspondant à la position considérée du balancier le long de la droite OD. Cette ordonnée est nulle au point D et atteint sa valeur maximum au point O, ce qui est bien le fait de la vitesse du balancier.

646. — Proposons-nous de calculer la vitesse angulaire du balancier d'une montre à ancre à l'instant où la cheville de plateau vient en contact avec le côté de l'entrée de la fourchette. Admettons l'angle de levée du balancier de 36° ; nous aurons $\alpha = 18°$; prenons l'angle $\alpha_0 = 270°$ et $T = 0^s{,}2$.

On aura

$$\omega = \sqrt{\frac{M}{A}\left(\alpha_0^2 - \alpha^2\right)} = \sqrt{\frac{M}{A}}\sqrt{(1{,}5\,\pi)^2 - (0{,}1\,\pi)^2}$$

et

$$\omega = \sqrt{\frac{M}{A}} \sqrt{(2.24\,\pi)^2} = \pi \sqrt{\frac{M}{A}} \sqrt{2.24}.$$

Nous avons déterminé (644)

$$\sqrt{\frac{M}{A}} = 15,708\,;$$

donc

$$\omega = 15,708 \times 3,1416 \times \sqrt{2,24} = 73,857.$$

Au moment du passage à la position de repos, nous avons trouvé

$$\omega = 74,022,$$

donc une différence très faible; il en résulte que, si le balancier se trouve dans une position rapprochée du point de repos, son mouvement est presque uniforme, ce que montre du reste aussi le tracé graphique de l'équation de la vitesse.

Autre chose est quand on calcule la vitesse angulaire du balancier pour un point très rapproché de la fin de sa course, par exemple pour $\alpha = 252^0 = 270^o - 18^o$. On a

$$\alpha_0^2 - \alpha^2 = (1,5\,\pi)^2 - (1,4\,\pi)^2 = 0,29\,\pi^2$$

et

$$\omega = 15,708 \times 3,1416 \times \sqrt{0,29} = 26,574.$$

On peut constater ainsi que la vitesse augmente rapidement au commencement du mouvement et que cette augmentation diminue au fur et à mesure que le balancier se rapproche de sa position de repos, où la vitesse est à son maximum. Passé ce point, l'augmentation de vitesse devient négative et repasse par les mêmes phases en sens inverse.

647. **Durée d'une oscillation du balancier.** — Afin de calculer le temps qu'emploie le balancier pour accomplir son oscillation ou une fraction d'oscillation, remplaçons, dans l'équation (9)

$$\omega = \sqrt{\frac{M}{A}\left(\alpha_0^2 - \alpha^2\right)},$$

ω par sa valeur

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{\frac{M}{A}\left(\alpha_0{}^2 - \alpha^2\right)},$$

d'où l'on tire

$$dt = \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{M}{A}\left(\alpha_0{}^2 - \alpha^2\right)}}.$$

En intégrant, on a

$$t = \sqrt{\frac{A}{M}} \int \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0{}^2 - \alpha^2}}.$$

Pour résoudre

$$\int \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0{}^2 - \alpha^2}},$$

on peut poser

$$\int \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0{}^2 - \alpha^2}} = \int \frac{d\,\frac{\alpha}{\alpha_0}}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\alpha_0{}^2}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Or, on sait que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \text{arc sin } x + C,$$

donc

$$t = \sqrt{\frac{A}{M}} \text{ arc sin } \frac{\alpha}{\alpha_0} + C.$$

Si l'on compte le temps t à partir du point de repos, la constante C est nulle, car t est zéro pour α égal à zéro. Mais, si l'on veut déterminer le temps à partir du commencement de l'oscillation, donc pour $\alpha = -\alpha_0$, on aura

$$C = \sqrt{\frac{A}{M}} \text{ arc sin } \frac{\alpha_0}{\alpha_0} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{A}{M}},$$

d'où

$$t = \sqrt{\frac{A}{M}}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc sin } \frac{\alpha}{\alpha_0}\right) = \sqrt{\frac{A}{M}} \text{ arc cos } \frac{\alpha}{\alpha_0}.$$

Pour obtenir le temps $\frac{T}{2}$ d'une demi-oscillation, donc pendant lequel le balancier parcourt l'arc HB (Fig. 165), remplaçons dans la formule

$$t = \sqrt{\frac{A}{M}} \text{ arc sin } \frac{\alpha}{\alpha_0}$$

α par α_0, ce qui donne $\frac{\alpha_0}{\alpha_0} = 1$. Le sinus étant égal à l'unité, l'angle est de 90° et son arc $\frac{\pi}{2}$. Par suite

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{A}{M}}$$

ou, pour la durée de l'oscillation complète,

$$(11) \qquad T = \pi \sqrt{\frac{A}{M}}$$

648. — Résumons les formules fondamentales établies jusqu'ici. La vitesse angulaire d'un balancier en un point quelconque de son oscillation situé à une distance α de sa position de repos est exprimée par

$$(9) \qquad \omega = \sqrt{\frac{M}{A}(\alpha_0{}^2 - \alpha^2)}.$$

La vitesse angulaire d'un balancier passant par sa position de repos, après en avoir été écarté d'un angle α_0, est exprimée par

$$(10) \qquad \Omega = \alpha_0 \sqrt{\frac{M}{A}}.$$

La durée de l'oscillation d'un balancier est représentée par la formule

$$(11) \qquad T = \pi \sqrt{\frac{A}{M}}.$$

Le temps d'une fraction d'oscillation d'un balancier parti d'un point situé à une distance α_0 de la position de repos et arrivant à un point écarté d'un angle α de cette position de repos est

$$(12) \qquad t = \sqrt{\frac{A}{M}} \text{ arc cos } \frac{\alpha}{\alpha_0}.$$

Enfin le temps d'une fraction d'oscillation comptée à partir de la position de repos jusqu'à une distance α de cette position sera

$$t = \sqrt{\frac{A}{M}} \arcsin \frac{\alpha}{\alpha_0}. \tag{13}$$

Remarquons que la formule (10), $T = \pi \sqrt{\frac{A}{M}}$, ne contient aucune valeur angulaire; de cette constatation on peut conclure *que la durée des oscillations d'un balancier est indépendante de leur amplitude*. Cette remarque est de première importance pour le réglage des montres et des chronomètres de marine. Les oscillations du balancier sont donc *isochrones*. Cet isochronisme n'existera toutefois que si des influences extérieures ne viennent pas l'altérer. Nous avons déjà dit que, dans une montre, ces influences sont multiples et leur analyse fera l'objet d'une partie importante de cette étude.

649. — Nous pouvons aussi construire graphiquement la formule (13). A cet effet, décrivons une demi-circonférence de rayon α_0 ; en choisissant une unité convenable, le centimètre par exemple, on aura, pour $\alpha_0 = 1{,}5\,\pi$, un rayon de 4,7124 centimètres. Traçons ensuite une seconde demi-circonférence de rayon égal à $\sqrt{\frac{A}{M}}$ avec une unité de 500 millimètres, par exemple. Nous aurons, lorsque $T = 0^s{,}2$,

$$\sqrt{\frac{A}{M}} = \frac{T}{\pi} = 0{,}063662,$$

d'où

$$\sqrt{\frac{A}{M}} \times 500 = 31{,}831\ {}^m/_m.$$

Faisant $Oa = \alpha$ et traçant ab perpendiculaire à OA, on a

$$\sin \frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{cb}{Ob};$$

par suite, le temps t sera exprimé par la longueur de l'arc de, de rayon $\sqrt{\frac{A}{M}}$ et compris dans l'angle cOb. On aura donc

bien

$$\text{arc } de = \sqrt{\frac{A}{M}} \text{ arc sin } \frac{\alpha}{\alpha_0} = t.$$

650. — Comme application, proposons-nous de calculer le temps employé par un balancier d'une montre avec échappement à ancre pendant que la cheville de plateau est en con-

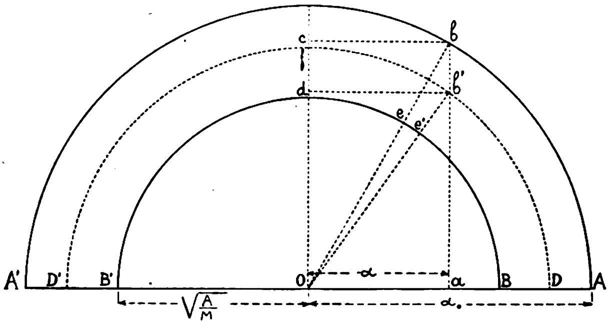


Fig. 167.

tact avec la fourchette. Admettons $\alpha_0 = 1{,}5\,\pi$ et le demi-angle de levée du balancier de 15°.

Nous aurons

$$t = 2\sqrt{\frac{A}{M}} \text{ arc sin } \frac{15}{270} = 2 \times 0{,}063662 \times 0{,}055584^{*}$$

et

$$t = 0{,}007077 \text{ seconde.}$$

Si, dans la position horizontale de la montre, la valeur de l'angle α_0 est $1{,}5\,\pi = 270°$, dans la position verticale cet angle diminuera d'environ 40° par suite de l'augmentation des frottements des pivots du balancier ; l'angle α_0 deviendra donc 230° ; en calculant, pour ce second cas, le temps du

* Pour calculer la valeur arc sin $\frac{15}{270}$, on pose

$$\text{arc sin } \frac{15}{270} = \text{arc sin } 0{,}05555....$$

L'angle dont le sinus est 0,05555, se détermine en prenant le logarithme de 0,05555 = $\bar{2}$,7447271 et cherchant le nombre correspondant dans la table des sinus, après avoir ajouté 10 à la caractéristique, on a 8,7447271 = log. sin 3°11′ 5″. A cet angle correspond une longueur d'arc de rayon 1 égal à 0,055584.

contact de la cheville de plateau avec la fourchette, on aura

$$t = \sqrt{\frac{A}{M}} \text{ arc sin } \frac{15}{230} = 0{,}008114 \text{ seconde.}$$

Par suite de cette diminution de l'amplitude, la durée du contact a donc augmenté d'un millième de seconde environ.

Le graphique (fig. 167) indique cette circonférence pointillée D*f*D'. En traçant le rayon O*b*', le temps est alors représenté par l'arc *de*' ; on peut ainsi constater l'augmentation de temps employé pour accomplir cette fraction d'oscillation.

651. — Dans une montre avec échappement à détente, on sait que la dent de la roue est sujette à ne pas tenir le repos. Ce fait provient de ce que la détente, soit bascule ou ressort, n'est pas revenue assez tôt au repos et que la dent de la roue a « passé devant » (617). On peut remarquer que ce défaut a plus facilement lieu dans les grandes oscillations que dans les petites. Or, nous venons de voir que plus les oscillations sont étendues, plus le temps du contact de l'échappement avec le balancier est réduit et, par suite, plus de chance a la détente d'arriver trop tard au repos.

On peut voir aussi par ce même graphique que la durée d'une demi-oscillation du balancier ne dépend pas de son amplitude, puisque cette durée est toujours représentée par la longueur *d*B de l'arc de rayon $\sqrt{\frac{A}{M}}$.

652. — A titre comparatif, remarquons que *la durée des oscillations du pendule dépend de leurs amplitudes*; elle est exprimée par la formule

$$(14)\quad T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{h}{2l} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{h}{2l}\right)^2 + \dots\right],$$

dans laquelle l représente la longueur du pendule, g l'accélération due à la force de la pesanteur et h la hauteur verticale de la chute du pendule.

Lorsque les oscillations sont petites, on peut négliger la série entre parenthèses et on a simplement

(15) $$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

653. — En remplaçant, dans la formule (10) du balancier,

$$T = \pi \sqrt{\frac{A}{M}},$$

A et M par leurs valeurs respectives (2) et (3),

$$A = m R^2 = \frac{P}{g} \cdot R^2 \text{ et } M = \frac{E h e^3}{12 L},$$

on obtient

(16) $$T = \pi \sqrt{\frac{12\, m\, R^2 L}{E\, e^3\, h}}.$$

Nous voyons qu'en augmentant l'une ou l'autre des valeurs littérales du numérateur, masse, rayon de giration ou longueur du fil du spiral, on augmentera le temps de l'oscillation. Par contre, si l'on augmente le coefficient d'élasticité du spiral, l'épaisseur ou la largeur de la lame, on diminuera la durée. Dans la formule (16) la masse se déterminera par le quotient du poids du balancier par l'accélération de la pesanteur : on pèsera donc ce corps avec une balance très sensible.

654. — La durée de l'oscillation du balancier étant proportionnelle à la racine carrée de sa masse, il en résulte que *le temps T est indépendant de l'altitude et de la latitude du lieu où le chronomètre se trouve.*

Si, par le transport d'une montre d'un endroit à un autre, par exemple du Locle (altitude 1000 mètres) à Neuchâtel (altitude 500 mètres), on observe une différence de marche, il faut en attribuer le motif à d'autres causes.

Pour un pendule, il n'en est plus de même ; si l'on transportait une horloge de l'équateur au pôle, on pourrait constater une avance, dans cette dernière position, de $3^m\,43^s,3$ en 24 heures ; nous voyons en effet que la formule (15)

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

fait dépendre la durée de l'oscillation de la valeur g et qu'elle ne contient pas le poids.

655. — Si l'on augmente ou diminue le poids d'un pendule à son centre d'oscillation, la durée de l'oscillation ne varie pas. Par contre, si l'on charge le pendule au-dessus du centre d'oscillation, l'horloge avancera et, en le chargeant audessous, elle retardera. Dans l'un ou l'autre de ces cas, la longueur l du pendule simple variera; l représente en effet la longueur du *pendule simple* donnant la même durée d'oscillation que le *pendule composé* dont il s'agit. La longueur l du pendule simple est égale à la distance comprise entre le point de supension et le centre d'oscillation.

656. — Remarquons encore que l'on se sert du pendule pour la détermination de la valeur de l'accélération g. On a trouvé par l'observation que sur deux montagnes en Suisse, pour une même altitude, la valeur de g peut être différente. Ce fait implique que les poids spécifiques des matières dont sont formées ces montagnes, sont différents. Cette simple remarque suffit pour démontrer l'exactitude des observations faites avec le pendule.

Détermination de l'épaisseur d'un fil de spiral.

657. — Connaissant la durée T d'une oscillation et le moment d'inertie $A = mR^2$ du balancier, on peut déterminer l'épaisseur e de la lame du spiral.

Préalablement, nous aurons encore deux valeurs à déterminer, soit la longueur L du spiral et la largeur h de la lame.

Quoiqu'il doive exister un certain rapport entre les dimensions L, h et e du spiral, on détermine généralement en pratique la longueur de la lame par rapport au rayon du balancier si l'enroulement est en forme de spirale d'Archimède, ou par rapport à la place disponible si l'enroulement est en forme hélicoïdale.

La hauteur de la lame est choisie d'après celles dont on

peut disposer. Envisageant donc les quantités L et h comme connues, nous tirons successivement de la formule (16)

$$T^2 = \frac{12\ \pi^2\ m\ R^2\ L}{E\ e^3\ h}$$

et

$$e^3 = \frac{12\ \pi^2\ m\ R^2\ L}{E\ T^2\ h},$$

d'où

$$(17) \qquad e = \sqrt[3]{\frac{12\ \pi^2\ m\ R^2\ L}{E\ T^2\ h}}.$$

Prenons un exemple numérique et soient les données suivantes :

$P = 0{,}7091$ gr. $\qquad L = 265\ ^m/_m$

$R = 7{,}8312\ ^m/_m$ $\qquad h = 0{,}22\ ^m/_m$

$E = 26000000$ gr. $\qquad g = 9808{,}8\ ^m/_m$

$T = 0{,}2$ seconde.

Nous aurons successivement, en nous rappelant que la masse m peut être déterminée par

$$m = \frac{P}{g},$$

log. π^2 = 0,99430	log. T^2 = 0,60206 — 2
log. P = 0,85071 — 1	log. E = 7,41497
log. R^2 = 1,78766	log. h = 0,34242 — 1
log. L = 2,42325	log. g = 3,99162
log. 12 = 1,07918	9,35107
6,13510	

log. numérateur = 6,13510

— log. dénominateur = 9,35107

log. e^3 = 0,78403 — 4

ou log. e^3 = 2,78403 — 6

log. e = 0,92801 — 2

et $e = 0{,}084725\ ^m/^m$.

L'épaisseur du fil devra donc être égale à 0,085 $^m/_m$, le spiral tant achevé, c'est-à-dire trempé, poli et bleui.

Si l'on veut exécuter pratiquement un spiral plat ou cylin-

drique d'après les données d'un calcul analogue au précédent, il faudra toujours, en choisissant le fil, tenir compte de la diminution d'épaisseur effectuée par le polissage de la lame. Comme ce fil est généralement déjà très bien préparé par les fabriques qui le fournissent, on peut admettre, pour un travail ordinaire, qu'une augmentation d'épaisseur de deux ou trois millièmes de millimètre suffit pour que la lame achevée obtienne l'épaisseur voulue à la terminaison du travail.

658. — Le calcul précédent pose la question de la détermination de la longueur d'une spirale d'Archimède, qui est la forme la plus fréquemment adoptée pour les spiraux des montres de poche.

Longueur de la spirale d'Archimède.

659. — La spirale d'Archimède, est une courbe engendrée par un point qui glisse d'un mouvement uniforme le long d'une droite, tandis que cette droite, en restant toujours dans le même plan, tourne autour d'un point fixe qui est le point initial de la spirale.

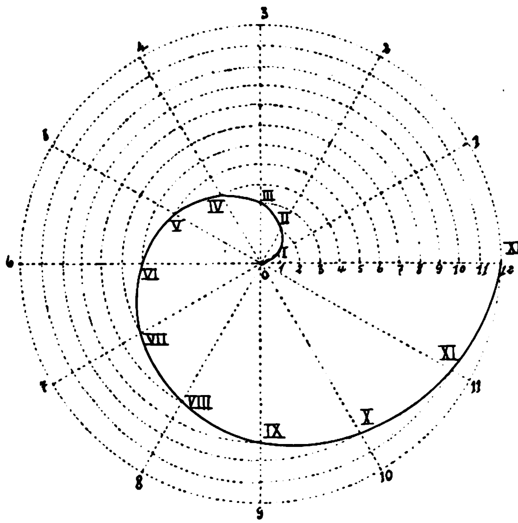


Fig. 168.

De cette propriété résulte le procédé indiqué par la figure 168 pour la construction graphique de la courbe en question.

L'équation de la spirale d'Archimède rapportée à des coordonnées polaires est

$$r = a\theta, \tag{18}$$

dans laquelle r est un rayon vecteur mené du point d'origine O (fig. 169) à un point quelconque M de la courbe.

θ est l'angle formé par ce rayon et l'axe Ox tangent à cette courbe au point d'origine.

a est une constante que l'on obtient en divisant par 2π la distance qui sépare deux spires consécutives. Si, par exemple, la distance entre 10 spires est de 3 m/m, celle qui sépare deux spires sera de 0,3 m/m et on a

$$a = \frac{0{,}3}{2 \times 3{,}1416} = 0{,}0477...,$$

valeur approximative de a pour le spiral d'une montre de 43 m/m (19 lignes).

Envisageons un point M′ de la courbe (fig. 169) infiniment rapproché de M ; nous aurons l'angle $MOM' = d\theta$ et la longueur de l'arc $MM' = ds$.

Décrivons encore du point O comme centre l'arc de cercle MN ; sa longueur sera exprimée par

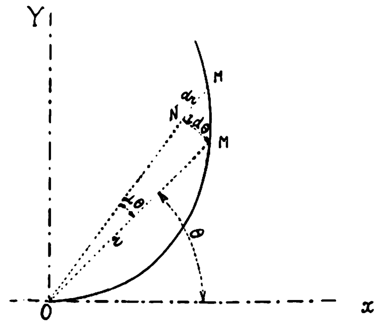


Fig. 169.

$$MN = r \,.\, d\theta.$$

A la limite, l'angle MNM′ devient droit et l'on a

$$ds = \sqrt{r^2\, d\theta^2 + dr^2}.$$

De l'équation de la courbe $r = a\,\theta$ on tire

$$dr = a d\theta;$$

en substituant ces valeurs dans la précédente, il vient

$$ds = \sqrt{a^2\,\theta^2 .\, d\theta^2 + a^2 . d\theta^2} = a . d\theta \sqrt{\theta^2 + 1},$$

ou, en intégrant,

$$L = a \int \sqrt{\theta^2 + 1} \,.\, d\theta + C.$$

Pour trouver

$$\int \sqrt{\theta^2 + 1} \,.\, d\theta,$$

posons

$$\sqrt{\theta^2 + 1} = z - \theta;$$

nous aurons

$$(a) \quad \int \sqrt{\theta^2 + 1} \,.\, d\theta = \int z . d\theta - \int \theta \,.\, d\theta = \int z \,.\, d\theta - \frac{\theta^3}{2}.$$

De (a) on déduit successivement

$$(b) \qquad 1 = z^2 - 2\, z\, \theta$$

$$(c) \qquad \theta = \frac{z^2 - 1}{2\, z}$$

et

$$(d) \qquad z = \theta + \sqrt{\theta^2 + 1}$$

$$(e) \qquad z^2 = 2\, \theta^2 + 1 + 2\, \theta \sqrt{\theta^2 + 1}.$$

L'équation (b) différenciée donne

$$0 = 2\, z.dz - 2\, z\,.\, d\,\theta - 2\, \theta\,.\, dz,$$

d'où

$$d\,\theta = \frac{(z - \theta)\, d\, z}{z}.$$

Remplaçant θ par sa valeur (c), il vient

$$d\,\theta = \frac{z^2 + 1}{2\, z^2}\, d\, z;$$

donc

$$\int z.d\,\theta = \int z\, \frac{(z^2 + 1)\, dz}{2\, z^2} = \int \frac{z}{2}\, dz + \int \frac{dz}{2z}$$

$$\int z.d\,\theta = \frac{z^2}{4} + \frac{1}{2}\, \frac{\log.\ z}{\log.\ e}.$$

Remplaçons z^2 et z par leurs valeurs, nous aurons :

$$\int z\,.\, d\theta = \frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\theta}{2} \sqrt{\theta^2 + 1} + \frac{1}{2}\, \text{Log. nat.} \left(\theta + \sqrt{\theta^2 + 1} \right).$$

Substituant la valeur de cette intégrale dans celle que nous cherchons et ajoutant la constante, on a :

$$\int \sqrt{\theta^2 + 1}\,.d\theta = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left[\theta \sqrt{\theta^2 + 1} + \text{Log.nat.} \left(\theta + \sqrt{\theta^2 + 1.} \right) \right] + \text{C},$$

en remarquant que $\frac{\theta^2}{2}$ (f) disparaît avec $-\frac{\theta^2}{2}$ (a).

Puisqu'on doit avoir L = 0 pour $\theta = 0$, nous aurons

$$C = -\frac{1}{4};$$

la longueur de la spirale devra donc être

(19) $$L = \frac{a}{2}\left[\theta\sqrt{\theta^2+1} + \text{Log. nat.}\left(\theta + \sqrt{\theta^2+1}\right)\right]$$

ou encore

(20) $$L = \frac{r}{2}\left[\sqrt{\theta^2+1} + \frac{\text{Log. nat.}\left(\theta + \sqrt{\theta^2+1}\right)}{\theta}\right].$$

Lorsque θ est une valeur élevée, on peut négliger l'unité à côté du carré de θ, de même que le second terme de la parenthèse, et l'on obtient, en appelant r'' et r' les rayons vecteurs extrêmes,

(21) $$L = \frac{r'' + r'}{2}\,\theta.$$

660. — Calculons un exemple de la formule (20) et soit

$$\theta = 16 \times 2\pi = 32\pi.$$

Nous aurons :

$\log : \pi = 0{,}49715$
$\log. 32 = 1{,}50515$

$\log : \theta = 2{,}00230$ $\quad \theta = 100{,}531$
$\log. \theta^2 = 4{,}00460$ $\quad \theta^2 = 10106{,}5$
$\log. \theta^2 + 1 = 4{,}00464$ $\quad \theta^2 + 1 = 10107{,}5$
$\log. \sqrt{\theta^2+1} = 2{,}00232$ $\quad \sqrt{\theta^2+1} = 100{,}536$
$\qquad + \theta = 100{,}531$

$\theta + \sqrt{\theta^2+1} = 201{,}067$

$\log.\left(\theta+\sqrt{\theta^2+1}\right) = 2{,}30334.$ $\quad \log.\text{Log.}\left(\theta+\sqrt{\theta^2+1}\right) = 0{,}36236$
$\qquad + \log. \frac{1}{e} = 0{,}36222$

$\qquad 0{,}72458$
$\qquad - \log : \theta = 2{,}00230$

$$\log. \frac{\text{Log. nat.}\left(\theta+\sqrt{\theta^2+1}\right)}{\theta} = 0{,}72228-2$$

$$\frac{\text{Log. nat. } (\theta + \sqrt{\theta^2 + 1})}{\theta} = 0{,}053$$

$$\sqrt{\theta^2 + 1} = 100{,}536$$

$$(22) \quad \sqrt{\theta^2 + 1} + \frac{\text{log. nat. } (\theta + \sqrt{\theta^2 + 1})}{\theta} = 100{,}589$$

Pour obtenir la longueur L du spiral, il faut multiplier cette dernière valeur par le demi-rayon extrême $\frac{r}{2}$. Nous voyons que ce nombre est peu différent de θ. Même si nous calculons cette valeur (22) pour un tour, donc pour $\theta = 2\pi$, nous obtenons

$$\frac{2\,L}{r} = 6{,}762,$$

valeur peu différente de $2\pi = 6{,}2832$.

La table ci-dessous donne les valeurs de

$$\sqrt{\theta^2 + 1} + \frac{\text{Log. nat. } (\theta + \sqrt{\theta^2 + 1})}{\theta} = \frac{2\,L}{r}$$

à partir de $\theta = 2\pi$ jusqu'à $\theta = 40\pi$.

θ	$2\,\frac{L}{r}$	θ	$2\,\frac{L}{r}$
2π	6,762	22π	69,124
4π	12,863	24π	75,471
6π	19,069	26π	81,759
8π	25,308	28π	88,029
10π	31,564	30π	94,309
12π	37,827	32π	100,589
14π	44,095	34π	106,869
16π	50,367	36π	113,150
18π	56,641	38π	119,430
20π	62,917	40π	125,711

Recherche de la quantité dont il faut allonger ou raccourcir la lame d'un spiral pour produire une différence donnée dans la durée des oscillations du balancier.

661. — Le plus fréquemment, la spire extérieure du spiral d'une montre passe entre deux fines goupilles fixées à la *raquette* avant l'encastrement de son extrémité dans le *piton*. Le mouvement de la raquette dans un sens ou dans l'autre augmente ou raccourcit la longueur active du spiral en produisant ainsi une augmentation ou une diminution de la durée des oscillations du balancier. On possède ainsi un moyen de rapprocher le plus possible de la normale la marche moyenne de la montre.

Il peut être intéressant de déterminer de quelle quantité il faut allonger ou raccourcir le fil du spiral pour obtenir une différence donnée dans la marche diurne de la montre.

Représentons par

T la durée de l'oscillation après l'allongement,

T′ » » avant »

L la longueur du spiral après l'allongement,

L′ » » avant »

n le nombre d'oscillations que le balancier doit exécuter en une seconde,

$\pm a$ le nombre de secondes dont varie la montre en 24 heures.

Pour la montre réglée, la durée d'une oscillation est exprimée par (16)

$$T = \pi \sqrt{\frac{12\, m\, R^2\, L}{E\, e^3\, h}}.$$

D'autre part, si T′ est la durée d'une oscillation correspondant à une longueur quelconque L′ du spiral, nous pouvons poser d'une manière analogue

$$T' = \pi \sqrt{\frac{12\, m\, R^2\, L'}{E\, e^3\, h}}.$$

En divisant la première de ces équations par la seconde et simplifiant, on obtient

$$\frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{L}{L'}},$$

ce qui se traduit ainsi : *les durées des oscillations d'un balancier sont proportionnelles à la racine carrée des longueurs actives du spiral, toutes autres quantités demeurant égales d'ailleurs.*

D'autre part nous avons

$$T = \frac{1}{n}.$$

La durée T′ sera le quotient du nombre de secondes en 24 heures (86400) par le nombre d'oscillations que le balancier de la montre non réglée exécute dans ce temps, soit par $(86400 \pm a)\ n$. On aura donc

$$T' = \frac{86400}{(86400 \pm a)\ n}$$

et

$$\frac{T}{T'} = \frac{86400 \pm a}{86400} = 1 \pm \frac{a}{86400} = \sqrt{\frac{L}{L'}},$$

Remarquons que, puisque n a disparu, le résultat ne dépend en aucune façon du nombre d'oscillations du balancier en une heure.

En élevant au carré l'équation précédente, il vient

$$\left(1 \pm \frac{a}{86400}\right)^2 = \frac{L}{L'},$$

ou encore

$$1 \pm \frac{2\ a}{86400} + \left(\frac{a}{86400}\right)^2 = \frac{L}{L'}.$$

Si la valeur a est petite et ne dépasse pas quelques minutes, on peut négliger la valeur

$$\left(\frac{a}{86400}\right)^2$$

et l'on aura

$$L = L' \left(1 \pm \frac{2\ a}{86400}\right),$$

ou encore

$$L = L' \pm L' \frac{2\alpha}{86400}$$

et

$$L - L' = \pm L' \frac{2\alpha}{86400}.$$

Soit $a = 1^m = 60$ sec. ; on aura

$$L - L' = \pm L' \frac{120}{86400} = \pm \frac{L'}{720}.$$

Si nous avons un spiral plat de rayon extérieur $r'' = 5^m/_m$ et de rayon intérieur $r' = 1^m/_m$, la formule (21) nous donne

$$L' = \frac{r'' - r'}{2} \theta = \frac{r'' - r'}{2} \cdot 2\pi N$$

N = nombre de spires et

$$L' = (5 - 1)\ 3{,}14\ N$$

Admettons que le nombre de spires compris entre r'' et r' soit de 15; par suite,

$$L' = 4 \times 3{,}14 \times 15 = 188{,}4^m/_m$$

et

$$L - L' = \pm \frac{188{,}4}{720} = \pm 0{,}26^m/_m.$$

Il faut donc allonger ou raccourcir de $0{,}26^m/_m$ un spiral ayant $188{,}4^m/_m$ de longueur pour produire une différence de marche d'une minute en 24 heures.

662. — Pour un spiral plus court, le calcul montre que la valeur L — L' est moindre, tandis que pour un spiral plus long elle augmente. On produit donc un effet plus grand, pour un même déplacement des goupilles de raquette, sur une petite montre de dame que sur une grande montre d'homme, plus grand aussi sur un réveil-matin avec faible nombre de tours du spiral que sur une montre avec spiral à grand nombre de spires relativement serrées.

Recherche du poids qu'il faut ajouter à un balancier ou en retrancher pour produire une différence donnée dans la durée des oscillations

663. — En ajoutant ou retranchant du poids à un balancier, on modifie sa masse et la durée de l'oscillation sera allongée ou raccourcie; pour augmenter la masse du balancier, on intercale le plus souvent une petite rondelle de métal, plus ou moins épaisse, sous la tête de deux vis opposées de la serge. Ces rondelles sont souvent en platine, afin d'en pouvoir réduire le plus possible l'épaisseur.

Supposons, comme dans le calcul précédent, qu'il s'agisse de produire une petite différence de marche et admettons de nouveau une minute pour cette différence en 24 heures.

Soit p le poids à ajouter ou à enlever et r la distance du centre à la place où s'ajoute ou se retranche le poids.

En conservant les mêmes notations que précédemment, le moment d'inertie du balancier deviendra, si l'on se rappelle que la masse $m = \frac{P}{g}$,

$$A = \frac{P}{g} R^2 \pm \frac{p}{g} r^2.$$

Nous aurons, par suite, la durée T de l'oscillation du balancier réglé exprimée par

$$T = \pi \sqrt{\frac{12\left(\frac{P}{g} R^2 \pm \frac{p}{g} r^2\right) L}{E e^3 h}},$$

tandis que la durée T′ était

$$T' = \pi \sqrt{\frac{12 \frac{P}{g} R^2 L}{E e^3 h}}.$$

On obtiendra donc par division et simplification

$$\frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{PR^2 \pm pr^2}{PR^2}}$$

et, d'après le calcul précédent (661),

$$\sqrt{\frac{PR^2 \pm pr^2}{PR^2}} = 1 \pm \frac{a}{86400}.$$

Elevant au carré et multipliant par PR^2, on obtient

$$PR^2 \pm pr^2 = \left(1 \pm \frac{a}{86400}\right)^2 PR^2$$

et, en effectuant,

$$\pm p = P \frac{R^2}{r^2}\left[\pm \frac{2a}{86400} + \left(\frac{a}{86400}\right)^2\right].$$

Lorsque $\left(\frac{a}{86400}\right)^2$ est petit, on peut négliger ce terme et l'on a simplement

$$\pm p = \pm P \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{2a}{86400}.$$

Pour $a = 60^s$,

$$\pm p = \pm P \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{1}{720}.$$

Soit le rayon de giration d'un balancier $R = 7{,}5$ et le rayon de l'emplacement du poids supplémentaire (ou retranché) $r = 9{,}5$, on aura

$$\pm p = \pm \frac{1}{720} \left(\frac{7{,}5}{9{,}5}\right)^2 P.$$

Le calcul donne

$$\pm p = \pm\ 0{,}00086\ P.$$

La charge qu'il faut ajouter ou retrancher à un balancier pour produire une variation diurne d'une minute, est donc représentée par environ la millième partie du poids total de ce balancier.

Théorie des courbes terminales.

664. — Nous avons vu comment on détermine le moment dû à la force élastique d'un ressort de forme circulaire, en partant du principe que ce ressort (ici un spiral cylindrique) conserve après sa déformation la forme circulaire et que son centre reste constamment sur l'axe d'oscillation (96-I).

L'équation que nous avons obtenue précédemment

$$l = v\alpha$$

montre que l'allongement l est indépendant du rayon de courbure ; nous en tirons la conclusion que la formule (641).

$$M\alpha = \frac{1}{12}\frac{Ehe^3\alpha}{L}$$

déjà établie restera la même quand le spiral, au lieu d'être cylindrique, sera plat comme c'est le cas pour la forme en spirale d'Archimède.

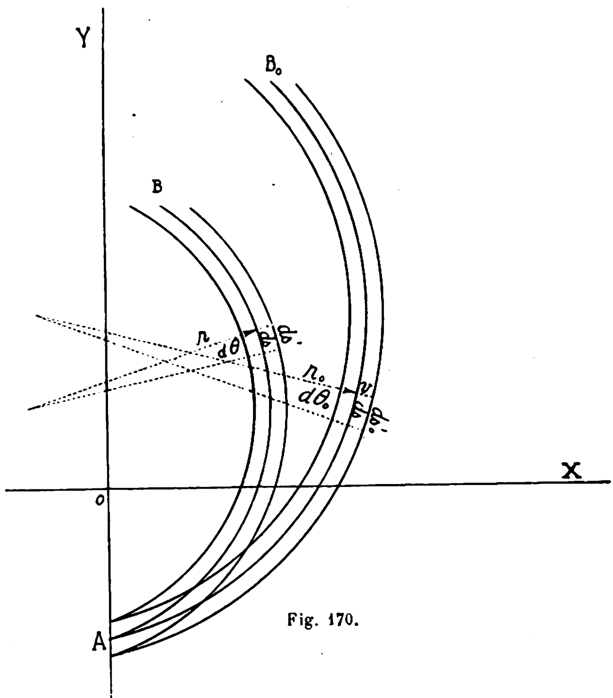


Fig. 170.

Cela posé, voici le problème à résoudre : déterminer la forme du spiral, plus spécialement celle de sa courbe terminale, de telle sorte que le moment Mα reste invariable quelle que soit la position du spiral autour de son axe.

A cet effet, envisageons, sur la fibre neutre d'un fil de spiral de rayon de courbure r_0, un élément d'arc ds (fig. 170) d'angle au centre $d\theta_0$.

On peut poser

$$ds = r_0\, d\theta_0 = r d\theta,$$

puisque les éléments de la fibre neutre ne subissent aucune déformation d'allongement pendant le mouvement.

On tire de là

$$r = r_0 \frac{d\theta_0}{d\theta}$$

et

$$d\theta = \frac{r_0\, d\,\theta_0}{r}, \text{ ou } \frac{d\theta}{d\theta_0} = \frac{r_0}{r}.$$

Considérons maintenant un élément ds'_0 de même angle au centre $d\,\theta_0$ à une distance $(r_0 + v)$ du centre, par conséquent appartenant à une fibre autre que la fibre neutre.

On aura

$$ds'_0 = (r_0 + v)\, d\,\theta_0. = r_0\, d\,\theta_0 + v\, d\,\theta_0$$

Après la déformation, cet élément a une longueur

$$ds' = (r + v)\, d\,\theta$$

ou

$$ds' = r.d\,\theta + v.d\,\theta.$$

L'allongement de cet élément sera naturellement donné par l'expression $ds' - ds'_0$, qui est la différence des longueurs de l'arc considéré avant et après la déformation, c'est-à-dire

$$ds' - ds'_0 = v\, d\,\theta - v\, d\,\theta_0,$$

ou

$$ds' - ds'_0 = v\,(d\,\theta - d\,\theta_0) = v.d\,\theta_0 \left(\frac{d\,\theta}{d\,\theta_0} - 1\right);$$

et comme

$$\frac{d\theta}{d\theta_0} = \frac{r}{r},$$

d'après ce qui précède, on aura pour l'allongement

$$ds' - ds'_0 = v d\theta_0 \left(\frac{r_0}{r} - 1\right) = v.r_0.d\theta_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) = v ds \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right).$$

L'allongement $ds' - ds'_0$ d'un élément de fibre est donc proportionnel à la distance v de la fibre considérée à la fibre neutre, à la longueur ds de l'élément correspondant de la fibre neutre et à la différence $\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$ des rayons de courbure de la fibre neutre après et avant la déformation. L'allongement total relatif à tout le spiral sera l'intégrale de l'allongement élémentaire que nous venons d'obtenir, c'est-à-dire

$$(1) \int \left(ds' - ds'_0\right) = l = \int v.ds \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) =$$

$$v \int \frac{ds}{r} - v \int \frac{ds}{r_0} = v \left[\int \frac{ds}{r} - \int \frac{ds}{r_0}\right].$$

Ces deux intégrales ont une signification très simple.

Nous savons que

$$r.\,d\theta = ds.$$

$d\theta = \frac{ds}{r}$ représente donc l'angle au centre du spiral compris entre les rayons r aboutissant aux extrémités de l'élément ds de la fibre neutre déformée; donc

$$\int_0^{2n\pi+\varepsilon_2} d\theta = \int_0^{2n\pi+\varepsilon_2} \frac{ds}{r}$$

représentera l'angle compris entre les rayons aboutissant au point initial du spiral et à son point final, n désignant le nombre de circonférences complètes décrites par le spiral, et ε_2 un angle plus petit qu'une circonférence entière $2\,\pi$. Soit α_2 cet angle.

On aura

$$\alpha_2 = \int_0^{n2\pi+\varepsilon_2} d\theta = \theta\Big|_0^{n2\pi+\varepsilon_2} n.\,2\pi + \varepsilon_2 - 0 = n.\,2\pi + \varepsilon_2.$$

On obtiendrait de même la valeur de α_1,

$$\alpha_1 = \int_0^{n2\pi+\varepsilon_1} d\,\theta_0 = \theta_0\,.\Big|_0^{n.2\pi+\varepsilon_1} = n.\,2\,\pi + \varepsilon_1,$$

représentant l'angle compris entre les mêmes rayons quand le spiral est au repos. La différence $\alpha_2 - \alpha_1$ de ces deux angles est évidemment égale à l'angle α dont on a fait tourner le balancier, c'est-à-dire que

$$(1)\qquad \alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = n.\,2\,\pi + \varepsilon_2 - (n.\,2\pi + \varepsilon_1) = \varepsilon_2 - \varepsilon_1,$$

donc

$$(2)\qquad l = v.\,(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = v\alpha.$$

D'autre part nous avons, toujours d'après (1),

$$(3)\ l = \int_0^L \left(ds' - ds'_0\right) = v\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)\int_0^L ds = v\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) s\Big|_0^L = v\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) L.$$

En égalant les deux expressions (2) et (3) de l, nous obtenons

$$v\,\alpha = v\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) L$$

ou

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{\alpha}{L},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{L} + \frac{1}{r_0},$$

d'où

$$(30) \qquad r = \frac{1}{\frac{1}{r_0} + \frac{\alpha}{L}} = \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} \cdot r_0}$$

L'expression

$$l = v\alpha$$

représentant l'allongement total du spiral, il est clair que

$$\frac{l}{L} = \frac{v\alpha}{L}$$

sera l'allongement que fait subir la déformation à un élément d'une longueur égale à l'unité. Cette quantité étant constante pour une valeur déterminée de v, le moment $M\alpha$ sera aussi constant. Ainsi donc, si l'on parvient à développer le spiral suivant la loi qu'exprime la formule (30), le moment dû à la réaction élastique du spiral sera rigoureusement égal à $M\alpha$. Nous verrons qu'un spiral ordinaire n'est pas développable suivant cette loi et que cette particularité a été l'origine de la théorie dite des courbes terminales. L'équation (30) permet de calculer la valeur du rayon de courbure variable d'un spiral quelconque au moyen du rayon initial toujours donné, dès que l'on connaît l'angle α décrit par le balancier, angle que l'on peut déterminer par l'observation directe.

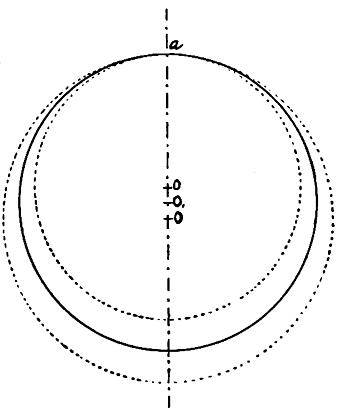


Fig. 171.

665. — Appliquons les notions acquises au cas d'un spiral cylindrique dépourvu de courbes terminales, dont le rayon initial r_0 est de 30 millimètres, et soit (fig. 171) L sa longueur. Le spiral décrit 8 tours complets ; nous aurons donc

$$L = 8 \times 2\,\pi\, r_0.$$

Supposons que nous fassions décrire au balancier un angle α égal à $+ 1,5\,\pi$. Après la déformation, le rayon r_0 a pris la valeur nouvelle r donnée par (30) :

$$r = \frac{30}{1 + \frac{1.5\,\pi}{8 \times 2\,\pi\,30} \times 30} = 27,4285.....$$

Par suite de l'encastrement de l'extrémité du spiral au point a du piton, la tangente à la courbe en ce point demeure invariable et le centre de la nouvelle circonférence doit se trouver sur la droite Oa. Le point a étant fixe, nous porterons sur Oa à partir de a une longueur égale à 27,4285...$^{m}/_{m}$ L'extrémité de cette longueur coïncide avec le nouveau centre O′, et l'image du spiral dans sa position déformée sera la circonférence décrite de O′ comme centre avec $O'a = r$ pour rayon. Si maintenant nous faisons décrire au balancier, ramené à la position qu'il occupait quand le spiral est au repos, un angle $-\,1.5\,\pi$, c'est-à-dire en sens inverse du premier ainsi que l'indique son signe —, le nouveau rayon r sera, toujours d'après (30) :

$$r = \frac{30}{1 - \frac{1.5\,\pi}{8 \times 2\,\pi .\,30} \times 30} = 33,1034...^{m}/_{m}.$$

Le nouveau centre s'éloigne donc de a et vient en O″. Le spiral est alors développé.

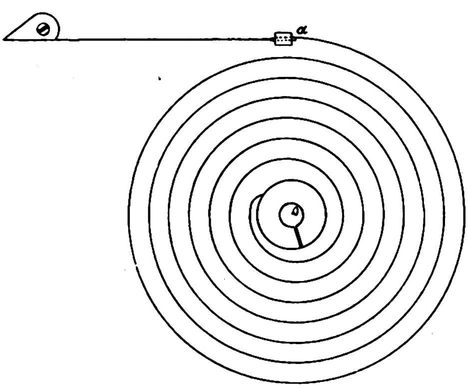
Le point O étant le centre du balancier, le spiral, dans son mouvement de déformation, exercera suivant la direction Oa une action alternative qui altère l'égalité de l'allongement des fibres par unité de longueur et qui influe, d'une façon négligeable du reste, sur la durée des oscillations du balancier. Cette action a encore une influence dont l'importance est plus considérable. Le déplacement du centre de gravité du spiral modifie la période d'oscillation du balancier et exerce sur l'axe de ce dernier un couple de torsion dont il faut tenir compte. Ces influences seront étudiées plus loin.

Toutes ces perturbations peuvent donc être attribuées au fait que le point a est fixe. Si l'on parvenait à trouver une

disposition permettant au point a de se rapprocher du centre O pour une torsion déterminée du spiral, et de s'en éloigner pour une torsion de sens contraire, le centre du spiral demeurerait constamment au point O dans toutes ses déformations. C'est ce que cherchent à réaliser les dispositions connues sous le nom de courbes terminales.

666. **Courbes terminales.** — Les montres courantes dont le régulateur est constitué par un spiral plat et par un système d'échappement à ancre, subissent aussi des perturbations de marche dues principalement au déplacement du centre de gravité du spiral, dont l'influence sera particulièrement marquée dans la position verticale de la montre. Mais ces déplacements, bien que se produisant d'une façon tout à fait analogue, sont loin d'atteindre la même amplitude que dans le cas du spiral cylindrique, ce que l'on peut certainement attribuer à la petitesse du rayon de la virole au point d'attache et aux faibles dimensions de la première spire. Le réglage pourra donc se faire dans ces cas avec une approximation suffisante pour les besoins courants.

Les exigences de la chronométrie de précision ont conduit à aborder résolument le réglage du mouvement par le spiral lui-même. L'ancienne chronométrie connaissait déjà des règles empiriques applicables à ce but et dont la principale consistait à modifier en tâtonnant la courbure des extrémités du spiral dans le voisinage immédiat de ses points d'attache. Il est bien clair que l'idée la plus simple aurait été de terminer le spiral d'une façon normale et de fixer son extrémité libre à un ressort flexible comme l'indique la figure 172. Car alors, en supposant à cette lame une élasticité convenable, le point a d'insertion du spiral devenait mobile en même temps



Fig, 172.

que le spiral, de telle sorte qu'il se rapproche du centre d'oscillation quand les spires se contractent et qu'il s'en éloigne au contraire quand elles se développent. Ce moyen très simple avait permis au chronométrier anglais Frodsham de construire un chronomètre de marine à spiral plat ainsi composé, chronomètre présenté en 1867 à l'Exposition universelle de Paris.

667. — On peut tout aussi simplement obtenir le même résultat en modifiant quelque peu cette disposition. La figure 172 fait comprendre l'inconvénient de ce long ressort dépassant le spiral. Il devait venir à l'esprit de chercher à courber cette lame du côté du spiral de telle façon que le réglage restât le même. C'est là l'origine des nombreuses dispositions de courbes terminales dont nous allons donner quelques exemples. Insistons toutefois bien sur un fait à retenir : c'est que ces constructions sont basées sur de simples données expérimentales. Il était réservé à Phillips de formuler les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doit satisfaire la courbe terminale d'un spiral pour qu'elle soit réglante, c'est-à-dire qu'elle assure l'isochronisme des oscillations.

On devait naturellement chercher à construire ces courbes au moyen d'un arc de cercle, quitte à vérifier a posteriori la réalisation du réglage. Construisons ainsi un arc de cercle ayant son centre O_1 sur Oa et dont le rayon est

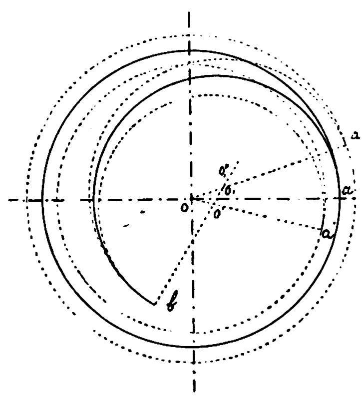


Fig. 173.

$$r_0 = 0{,}826819\ \varrho_0,$$

ϱ_0 étant le rayon des spires du spiral non déformé. Nous avons par conséquent

$$\varrho_0 = 30\ ^{m}/_{m},$$
$$r_0 = 24{,}80457\ldots\ ^{m}/_{m}.$$

Le point a est donc commun à la courbe terminale et aux spires. On construit cet arc de telle sorte que l'angle qu'il embrasse au centre soit de 242°26′. Si nous faisons tourner le balancier d'un angle $\alpha = +\ 1{,}5\ \pi$, le rayon r' de la courbe déformée sera donné par l'équation (30) :

$$r' = \frac{r_0}{1 + \frac{1.5\,\pi}{8 \times 2\pi\varrho_0} \cdot r_0},$$

si l'on prend pour L la valeur $8 \times 2\pi\varrho_0$;
d'où

$$r' = 23{,}02\ldots..$$

Le point b étant fixe, le nouveau centre O′ de la courbe terminale doit se trouver sur la ligne bO_1, car cette ligne demeure normale au cercle en b. Du reste ce centre O′ se trouve sur bO_1 à une distance r' de b. De ce nouveau centre O′, nous décrivons un arc de cercle de rayon r' et de longueur ba' égale à celle de l'arc non déformé ; nous obtenons ainsi le point a' commun à la courbe et aux spires dans la nouvelle position du balancier.

Il est facile de voir que, après la déformation, le centre du spiral ne sera plus en O, mais qu'il se sera déplacé. De plus son rayon ϱ_0 sera devenu

$$\varrho' = \frac{\varrho_0}{1 + \frac{1{,}5\pi}{8{,}2\pi\,\varrho_0} \cdot \varrho_0} = 27{,}4285.$$

Le centre devra se trouver sur la droite $a'O'_1$ normale à l'extrémité a' de la dernière spire, et à la distance $\varrho' = 27{,}4285$ de a. On obtient ainsi le nouveau centre du spiral O′. Si le spiral se déforme concentriquement, O′ doit coïncider avec le centre primitif O. Alors la courbe terminale est théoriquement exacte. On peut vérifier que notre construction conduit effectivement à ce résultat.

Semblablement nous pouvons développer le spiral en sens inverse du premier en prenant α égal à $-1{,}5\,\pi$. Le rayon r'' de la courbe terminale devient alors

$$r'' = \frac{r_0}{1 - \frac{1{,}5\pi}{8 \times 2\pi\varrho_0} \cdot r_0} = 26{,}888\ldots..\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{m}}.,$$

et son centre O″ sera sur bO_1, à une distance $r'' = 26{,}888$ de b. En décrivant du centre O″, avec r'' comme rayon, un arc de cercle de longueur égale à ba, nous trouverons le point a'' où la courbe terminale se détache des spires après la défor-

mation. Le nouveau centre des spires sera situé sur $a''O''$, à une distance

$$\varrho'' = \frac{\varrho^0}{1 - \frac{1,5\pi}{8 \times 2\pi\varrho_0} \cdot \varrho_0} = 33,1034..... \,^{m}/_{m}.$$

de a''. Si la déformation du spiral est concentrique, ce nouveau centre O'' devra coïncider avec le centre primitif O. C'est ce qui se produit en réalité. La courbe *ba* est donc celle que nous cherchions à construire, puisqu'elle permet le développement et la contraction concentriques du spiral.

668. — L'horloger Breguet avait déjà construit un spiral plat terminé par une courbe réglante extérieure. De patientes recherches pratiques l'avaient conduit à cette disposition. L'ingénieur Ed. Phillips détermina les conditions précises auxquelles doit satisfaire un spiral parfaitement isochrone. Par l'application de la théorie du mouvement d'oscillation d'un solide autour d'un axe fixe, il obtint l'équation du déplacement du spiral et il en donna la solution dans différents cas. La discussion de ces solutions le conduisit à établir les règles suivantes pour la construction des courbes extrêmes.

1° Le centre de gravité de la courbe doit se trouver sur la perpendiculaire menée par le centre des spires au rayon aboutissant au point commun au spiral et à la courbe terminale.

2° La distance de ce centre de gravité au centre du spiral doit être égale au carré du rayon ϱ_0 des spires divisé par la longueur l de la spirale ; si d est cette distance, on devra avoir

$$d = \frac{\varrho_0^{\,2}}{l}.$$

Le développement mathématique de Phillips, que nous ne pouvons reproduire ici parce qu'il sortirait du cadre imposé à cet ouvrage, se trouve exposé dans son « *Mémoire sur le spiral réglant* » publié en 1864 à Paris. On le consultera avec intérêt sur cette question capitale ; nous en donnerons plus loin un simple extrait.

Si l'on rapporte la courbe terminale à un système d'axes de coordonnées rectangulaires ayant son origine au centre du spiral, les deux règles précédemment données se traduisent par les équations suivantes :

$$\Sigma x . dl = 0$$
$$\Sigma y . dl = \varrho_0^2,$$

qui signifient que le moment statique de la courbe terminale par rapport à l'axe des y est nul et que celui par rapport à l'axe des x est égal à ϱ_0^2. Ce sont là les relations de Phillips.

Méthode graphique pour la détermination des courbes terminales.

669. — Un système d'axes coordonnés rectangulaires a son origine au centre du spiral. L'axe des abscisses passe par le point où la courbe terminale se détache du spiral ; on choisira une échelle des longueurs suffisamment grande, en prenant par exemple le rayon des spires égal à 100 m/m., comme sur la planche 18 ; cette échelle correspondra approximativement à 20 fois la grandeur d'exécution du système. Supposons donné le rayon ϱ_0 du spiral, de même que l'éloignement Ob du point terminal de la courbe au centre du balancier. Si $\varrho_0 = 3{,}5$, par exemple, et O$b = 2{,}1$; nous aurons la proportion

$$\frac{\varrho_0}{Ob} = \frac{100}{x},$$

pour déterminer à l'échelle de dessin la distance Ob ; c'est-à-dire, en remplaçant ϱ_0 et Ob par leurs valeurs réelles,

$$\frac{3{,}5}{2{,}1} = \frac{100}{x},$$

d'où

$$x = \frac{100 \times 2{,}1}{3{,}5} = 60 \ {}^{m}/_{m}.$$

La distance Ob sera donc de 60 m/m sur le dessin. On décrira de O comme centre avec un rayon égal à 60 m/m une circonférence. Si la montre est munie d'une raquette, le point b sera évidemment le milieu de la distance des deux goupilles,

laquelle ne dépassera pas l'épaisseur de la lame du spiral. Dans ce cas encore la courbe terminale devra avoir au commencement la forme d'un arc de cercle décrit du point O comme centre, afin de rendre impossible un déplacement de la courbe par un mouvement éventuel de la raquette.

La première condition de Phillips exige que le centre de gravité de la courbe se trouve sur l'axe Oy. Pour y satisfaire, on trouve une courbe dite « de sentiment » adb tangente en a aux spires et se raccordant en d à la circonférence de 60 m/m de rayon. On divisera ensuite la courbe ainsi obtenue en éléments égaux suffisamment petits pour qu'on puisse les considérer sans erreur appréciable comme des droites. On pourra les prendre égaux à 20 m/m par exemple. Le dernier élément bc sera généralement plus petit que les autres si la division ne se termine pas exactement au point b. Puis on détermine le centre de gravité de chacune de ces petites droites. Il se trouve naturellement en leur milieu. On mesurera la distance x de chacun de ces centres à l'axe Oy et on modifiera celle qui est relative à l'élément bc en la multipliant par le rapport de cet élément bc à la longueur commune (20 m/m dans notre cas) des autres éléments de la courbe. La première condition de Phillips sera réalisée si la somme des distances d qui se trouvent à gauche de Oy, est égale à la somme de celles qui se trouvent à sa droite, c'est-à-dire si

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = x_8$$
$$+ x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18},$$

comme sur la figure, c'est-à-dire

$$\Sigma x\, dl = dl \Sigma x = 0, \text{ ou } \Sigma x = 0,$$

puisque dl est différent de 0. Si cela n'était pas, il faudrait modifier l'une ou l'autre portion de la courbe jusqu'à ce que cette égalité soit vérifiée.

Il reste maintenant à tenir compte de la deuxième condition Phillips, savoir que la distance OG du centre de gravité de la courbe à l'origine soit égale à

$$\frac{\varrho_0^2}{l},$$

ϱ_0 étant, comme on sait, le rayon du spiral, l la longueur de la courbe. Dans le cas que nous traitons actuellement, on doit par conséquent avoir

$$OG = \frac{\varrho_0^2}{l} = \frac{100 \times 100}{355} = 28{,}165\,^{m}/_{m}.$$

On tire de là

$$l.OG = \varrho_0^2 = \Sigma\, y\, dl.$$

On n'a pas oublié que la longueur d'un élément de courbe multipliée par la distance de son milieu à un axe quelconque est ce que nous avons appelé le *moment* de cet élément par rapport à cet axe. La somme des moments des éléments d'une courbe sera, par suite d'un théorème connu, égale au moment de la courbe entière par rapport à ce même axe, la somme étant faite algébriquement. Pour notre courbe terminale, cette somme, effectuée par rapport à Ox, devra être égale à ϱ_0^2, d'après l'équation qu'on vient d'écrire, c'est-à-dire qu'on devra avoir, en désignant par dl la longueur commune des éléments, l_1 celle de l'élément plus petit bc et y_1, y_2, y_3, y_4... la distance de leur milieu à l'axe Ox,

$$dl.y_1 + dl.y_2 + dl.y_3 + dl.y_4 + dl.y_5 + dl.y_6 + dl.y_7 + dl.y_8 + dl.y_9 + dl.y_{10} + dl.y_{11} + dl.y_{12} + dl.y_{13} - \left[dl.y_{14} + dl.y_{15} + dl.y_{16} + dl.y_{17} + dl_1 y_{18}\right] = \varrho_0^2,$$

ou, en mettant en facteur commun la longueur dl,

$$dl\left\{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11} + y_{12} + y_{13} - \left[y_{14} + y_{15} + y_{16} + y_{17} + \frac{dl_1}{dl}\cdot y_{18}\right]\right\} = \varrho_0^2,$$

soit

$$dl\,\Sigma y = \varrho_0^2$$

C'est précisément la deuxième condition de Phillips.

L'unité de longueur étant de $20\,^{m}/_{m}$, on devra avoir

$$dl\Sigma y = l.OG = \frac{\varrho_0^2}{20} = \frac{10000}{20} = 500.$$

Il faudra donc que la somme des distances y situées au dessus de Ox surpasse de 500 la somme des distances y

situées au dessous de Ox. Si cela n'était pas, on modifierait la courbe, tout en continuant à satisfaire à la première condition, jusqu'à ce que la seconde soit aussi réalisée.

On voit que cette méthode graphique est une méthode par approximations successives.

Courbes terminales déterminées par le calcul.

670. — Il y a plusieurs méthodes basées sur le calcul et donnant des formes particulières pour les courbes terminales. Nous en détaillerons quatre à titre d'exemple.

671. **Courbe formée d'un seul arc de cercle.**— Soient (fig. 174)
$O_1a =$ rayon de la courbe terminale,
$OG = e$ la distance du centre du spiral au centre de gravité de la courbe
$OO_1 = a = \rho_0 - r_0$,
ρ_0 étant le rayon du spiral et r_0 le rayon de la courbe,
$O_1G = d$, $ba = c$,
$l =$ longueur de la courbe.

Le centre de gravité d'un arc de cercle est situé, par raison de symétrie, sur le rayon OC perpendiculaire à la corde AB et à une distance OG telle que

$$\frac{\mathrm{OG}}{\mathrm{OC}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{arc\ AB}}, \qquad \text{ou} \quad \frac{d}{r_0} = \frac{c}{l},$$

en se servant des notations convenues, et où c désigne la corde AB.

On tire de cette égalité

$$d = r_0 \frac{c}{l}.$$

En désignant par β l'angle $a\mathrm{O_1G}$ (fig. 174), nous aurons

$$c = 2 r_0 \sin \beta$$
$$l = 2 r_0 \beta.$$

Par suite,

$$d = r_0 \frac{2r_0 \sin \beta}{2r_0 \beta} = r_0 \frac{\sin \beta}{\beta}.$$

Multiplions de part et d'autre par sin β, il vient :

(1) $$d \sin \beta = r_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta}.$$

Mais dans le triangle OO_1G

$$O_1G \sin (GO_1O) = d \sin (GO_1O) = e.$$

Or, comme nous avons $\sin (GO_1O) = \sin (180^0 - \beta) = \sin \beta$, il vient $d \sin \beta = e$, et par suite

(2) $$e = r_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta}.$$

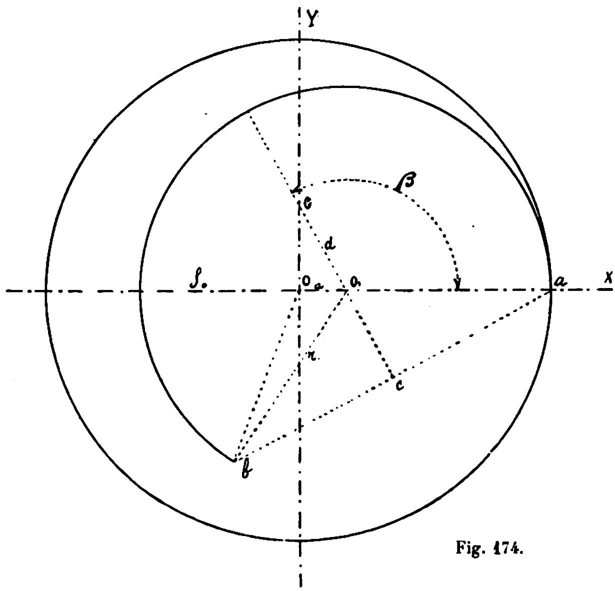


Fig. 174.

O_1a, le rayon de la courbe terminale
$OG = e$, la distance du centre du spiral au centre de gravité de la courbe
$OO_1 = a = \rho_0 - r_0$ (ρ_0 étant le rayon du spiral et r_0 celui de la courbe)
$O_1G = d$
$ba = c$
$l =$ longueur de la courbe.

D'autre part, la deuxième condition de Phillips donne

(3) $$e = \frac{\rho_0^2}{l} = \frac{\rho_0^2}{2 r_0 \beta}.$$

On aura donc aussi (2) et (3)

$$r_0 \frac{\sin^2\beta}{\beta} = \frac{\varrho_0^2}{2 r_0 \beta},$$

d'où

$$(4) \qquad r_0 = \frac{\varrho_0}{\sqrt{2}.\sin\beta}$$

D'autre part nous avons

$$a = d \cos(GO_1O) = d \cos(180^0 - \beta) = d \cos\beta$$

et, comme

$$d = r_0 \frac{\sin\beta}{\beta},$$

il vient

$$a = -r_0 \frac{\sin\beta.\cos\beta}{\beta} = \varrho_0 - r_0.$$

On en tire :

$$(5) \quad r_0 = \frac{\varrho_0 \beta}{\beta - \sin\beta\cos\beta}.$$

En égalant les deux valeurs de r_0 (4) et (5), il vient :

$$\frac{\varrho_0\beta}{\beta - \sin\beta\cos\beta} = \frac{\varrho_0}{\sqrt{2}.\sin\beta},$$

d'où

$$\sqrt{2} = \frac{1}{\sin\beta} - \frac{\cos\beta}{\beta}.$$

La valeur de β satisfaisant à cette égalité est

$$\beta = 121^0\,12'48''.$$

On peut s'en assurer en effectuant les calculs. On obtient alors :

$\log.\sin\beta = 9,9320898.6 - 10 \qquad \log.\cos\beta = 9,7145192.4 - 10$

$\text{og}.\frac{1}{\sin\beta} = 0,0679101.4 \qquad -\log.\beta = \frac{0,3254266.4}{\bar{1},3890926.0}$

$$\text{nomb. correspondant à } \log.\frac{1}{\sin\beta} = 1.1692577,$$

$$\text{nomb. correspondant à } \log.\frac{\cos\beta}{\beta} = -0.2449575$$

$$\frac{1}{\sin\beta} - \frac{\cos\beta}{\beta} = 1,4142152$$

$$-\sqrt{2} = \underline{1.4142136}$$

$$\text{Différence} = 0.0000016$$

L'erreur est donc très petite.

En prenant $\varrho_0 = 100$ m/m, dans l'équation

$$r_0 = \frac{\varrho_0}{\sin\beta\sqrt{2}},$$

il vient :

$$\log.\sqrt{2} = 0{,}1505150 \qquad \log.100 = 2{,}0000000$$

$$+\log.\sin\beta = \underline{9.9320898.6} - 10 - \log.\sqrt{2}\sin\beta = \underline{0.0826048.6}$$

$$\log.\sqrt{2}\sin\beta = 0.0826048.6 \qquad \log.r_0 = 1.9173951.4$$

d'où

$$r_0 = 82{,}679.$$

En résumé, on pourra toujours construire une courbe terminale formée d'un seul arc de cercle en prenant son rayon égal à

$$r_0 = 0{,}82679\,\varrho_0$$

et en lui faisant sous-tendre un arc

$$2\beta = 245^0\,25'\,36''.$$

672. — **Courbe composée de deux quarts de cercle réunis par une droite.** — Cette courbe symétrique est représentée sur la fig. 175. Son axe de symétrie est ici l'axe Oy ; son centre de gravité se trouvera donc forcément sur cette ligne. C'est la première condition de Phillips.

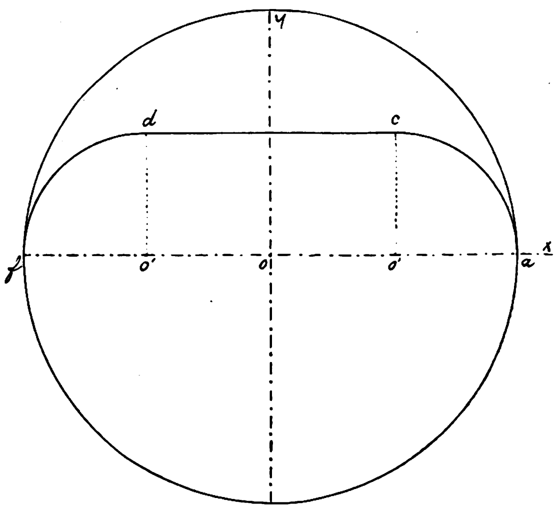


Fig. 175.

La ligne se compose donc de deux arcs de cercle sous-tendant un arc de 90° et réunis par une droite dont la longueur est égale au rayon ϱ_0 du spiral. Ajoutons que le rayon

des quarts de cercle est la moitié du rayon des spires. La deuxième condition de Phillips se rapporte à la somme des moments statiques de chacun des éléments de la courbe par rapport à l'axe Ox. Ce sont ces moments qu'il faut évaluer.

Le moment de la droite sera

$$\Sigma y \,.\, ds = y \Sigma ds,$$

puisque l'éloignement y est le même pour tous les points de la droite. Nous savons qu'il est égal à $\frac{\varrho}{2}$.

$$y = \frac{\varrho}{2}.$$

La somme $\Sigma\, ds$, étant la somme des éléments de la droite, est égale à sa longueur, que nous avons prise égale à ϱ_0. On aura donc

$$y \Sigma ds = \frac{\varrho}{2} \cdot \varrho = \frac{\varrho^2}{2}.$$

Il s'agit maintenant d'évaluer le moment statique des deux arcs de cercle terminaux. A cet effet, considérons un élément d'arc MM′ $= ds$ (figure 176).

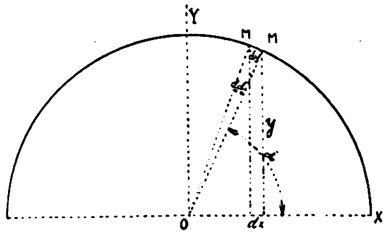


Fig. 176.

Soit y l'ordonnée du point M. Celle du point M′ sera $(y + dy)$. Le moment statique de cet élément sera par définition

$$d \times ds,$$

d désignant la distance du centre de gravité de l'élément ds à l'axe Ox. La substance dont est faite la courbe, étant homogène, ce centre de gravité se trouvera au milieu de la longueur de l'élément supposé rectiligne. La distance d de ce point à l'axe est évidemment donné par la somme

$$d = \frac{y + (y + dy)}{2} = \left(y + \frac{dy}{2}\right).$$

Le moment statique de cet élément par rapport à l'axe Ox est donc :

$$\left(y + \frac{dy}{2}\right) . ds . = y . ds + \frac{dy}{2} ds . = y\, ds + \frac{1}{2} dy . ds;$$

dy et ds étant des infiniment petits du premier ordre, leur produit $dy.\ ds$ est un infiniment petit du 2e ordre. On pourra par conséquent en première approximation le négliger et écrire, pour le moment élémentaire,

$$y . ds .$$

Le moment relatif à la courbe entière sera la somme de ces moments élémentaires :

$$\Sigma\, y . ds.$$

Mais, comme cette somme est relative à un nombre infiniment grand d'éléments ds eux-mêmes infiniment petits, la somme envisagée se transforme en une intégrale

$$\int y . ds$$

étendue à toute la courbe.

Si α désigne l'angle XOM, on aura évidemment

$$ds = r . d\alpha, \qquad y = r.\ \sin \alpha, \qquad x = r \cos \alpha.$$

Donc le moment intégral devient

$$\int y\, ds = \int r . \sin \alpha .\ r .\ d\alpha = r^2 \int \sin \alpha\, d\alpha = - r^2 \cos \alpha + \mathrm{C},$$

C désignant une constante d'intégration. Si $\alpha = 0, s$ est aussi nul. Du reste, pour $\alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$ et il vient, puisque le moment est nul dans ce cas :

$$0 = - r^2 . 1 + \mathrm{C}. \qquad \text{d'où } \mathrm{C} = r^2.$$

Donc

$$\int y\, ds = r^2 (1 - \cos \alpha).$$

Pour un quart de circonférence

$$\alpha = 90^\circ ; \cos \alpha = \cos 90^\circ = 0.$$

Donc

$$\int y .\ ds = r^2.$$

Tel est le moment statique d'un quart de circonférence, par rapport à l'axe Ox, dans la position que nous considérons. Pour les deux quarts de circonférence, le moment sera naturellement double du précédent, c'est-à-dire

$$2\, r^2.$$

Or $r = \frac{\varrho_0}{2}$ par construction, donc le moment considéré a pour valeur

$$\frac{2 \cdot \varrho_0^2}{4} = \frac{\varrho_0^2}{2}.$$

Le moment de la courbe terminale totale sera égal à la somme des moments des lignes composantes, c'est-à-dire

$$\frac{\varrho_0^2}{2} + \frac{\varrho_0^2}{2},$$

le deuxième terme provenant de la partie droite. Cette somme est donc égale à ϱ_0^2. C'est la 2e condition de Phillips.

673. — 3° **Courbe formée par deux arcs de cercle.** — On aura sans doute remarqué que les deux courbes précédentes ne sont pas applicables aux montres munies d'une raquette, parce que le commencement de la courbe n'est pas concentrique au balancier. La construction suivante est adaptée à ce but. Elle se compose d'un premier arc de cercle bc de rayon r' décrit du point O comme centre et de la demi-circonférence ca décrite du point O', milieu de ca, comme centre avec un rayon r (fig. 177). Il faut montrer que cette courbe satisfait aux deux conditions fondamentales énoncées par Phillips. Son emploi sera alors justifié.

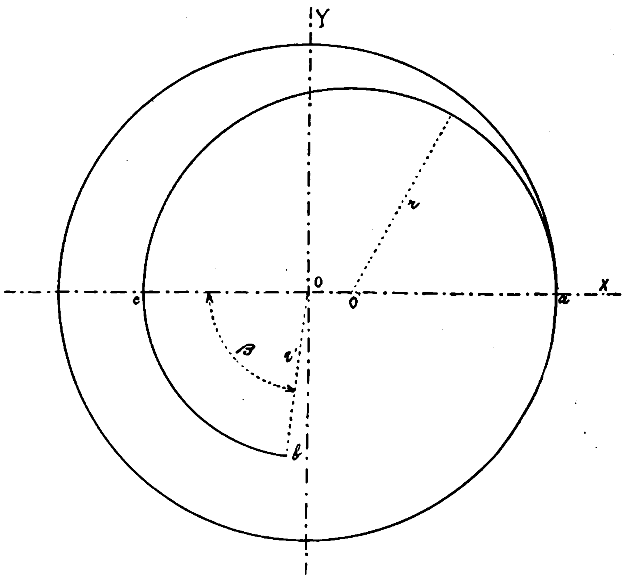


Fig 177.

D'après la figure, on voit que

$$\text{(a)} \qquad r' = 2r - \varrho_0.$$

Le moment de la demi-circonférence par rapport à l'axe Ox sera le double du moment d'un quart de circonférence du même rayon. Or, nous venons de trouver que ce dernier est égal à r^2. Donc le moment cherché est

$$M_1 = 2\, r^2.$$

Si l'on désigne par β l'angle b O c, nous savons (voir l'exemple précédent) que le moment statique de l'arc cb par rapport à Ox sera

$$M_2 = -\, r'^2\ (1 - \cos\beta),$$

D'après la 2e condition de Phillips, il faudra que

$$M_1 + M_2 = \varrho_0^2.$$

ou

$$2r^2 - r'^2\,(1 - \cos\beta) = \varrho_0^2\,;$$

ou en se servant de (a)

$$2\,r^2 - (2r - \varrho_0)^2(1 - \cos\beta) = \varrho_0^2.$$

Puis, en développant les parenthèses,

$$2r^2 - (4\,r^2 + \varrho_0^2 - 2\,r\varrho_0)\ (1 - \cos\beta) = \varrho_0^2$$

$$2r^2 - 4\,r^2 - \varrho_0^2 + 4\,r\,\varrho_0 + 4\,r^2\cos\beta + \varrho_0^2\cos\beta - 2\,r\varrho_0\cos\beta = \varrho_0^2$$

$$-\,2\,r^2 + 4\,r\,\varrho_0 - 2\,\varrho_0 = -\,(2\,r - \varrho_0)^2\cos\beta,$$

ou

$$-\,2\ (r^2 - 2\,r\varrho_0 + \varrho_0^2) = -\,(2\,r - \varrho_0)^2\cos\beta,$$

c'est-à-dire, en changeant les signes de part et d'autre et remarquant que la parenthèse du premier membre est le carré de $(r - \varrho_0)$,

$$\text{(b)} \qquad 2\ (r - \varrho_0)^2 = (2\,r - \varrho_0)^2\cos\beta.$$

Cette équation énonce la 2e condition de Phillips.

La 1re condition de Phillips impose à la courbe la nécessité d'avoir son centre de gravité sur l'axe des y. Le moment de la demi-circonférence ca par rapport à l'axe des y est

$$\int x\ ds.$$

Or, d'après la figure,

$$x = r\cos\alpha + \varrho_0 - r$$

$$ds = r\,d\alpha$$

$$x\ ds = r^2\cos\alpha\,d\alpha + r\,(\varrho_0 - r)\,d\alpha.$$

Le moment intégral s'obtiendra en faisant la somme de ces moments entre les valeurs de $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$, ce qui donne

$$M_1 = \int_0^\pi r^2 \cos \alpha \, d\alpha + \int_0^\pi r(\varrho_0 - r)\, d\alpha = r^2, \sin\alpha \Big|_0^\pi +$$

$$+ r(\varrho_0 - r)\, \alpha \Big|_0^\pi,$$

$$M_1 = r^2 (\sin \pi - \sin 0) + r(\varrho_0 - r)(\pi - o) = r(\varrho_0 - r)\pi,$$

car les autres termes s'annulent. Le moment de l'arc $c\,b$ par rapport à Oy sera

$$M_2 = -\int x\,ds = -\int r' \cos \beta . r'\,d\beta = - r'^2 \int_0^\beta \cos \beta \, d\, \beta$$

$$M_2 = - r'^2 \sin \beta.$$

Ce moment est négatif, parce que les x considérés sont situés sur la gauche de l'axe Oy. Le moment total des deux arcs par rapport à Oy sera

$$M = M_1 + M_2 = r(\varrho_0 - r)\pi - r'^2 \sin \beta.$$

Ce moment doit être nul d'après la condition 1 de Phillips, c'est-à-dire qu'on a

$$r(\varrho_0 - r)\pi - r'^2 \sin \beta = 0.$$

Mais

$$r' = 2r - \varrho_0,$$

donc

$$r(\varrho_0 - r)\pi - (2r - \varrho_0)^2 \sin \beta = 0.$$

ou

$$(c) \qquad r(\varrho_0 - r)\pi = (2r - \varrho_0)^2 \sin \beta.$$

Pour faire disparaître l'angle β, élevons les équations (b) et (c) au carré et additionnons-les membre à membre. Il viendra

$$4(r - \varrho_0)^4 + r^2(\varrho_0 - r)^2 \pi^2 = (2r - \varrho_0)^4 \left\{\sin^2\beta + \cos^2\beta\right\}$$

et, comme on a toujours

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1,$$

il reste

$$(d) \qquad 4(r - \varrho_0)^4 + r^2(\varrho_0 - r)^2 \pi^2 = (2r - \varrho_0)^4.$$

Rappelons qu'on a en général

$$(a + b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} b^2 +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^{m-3} b^3 + \cdots\cdots + b^m.$$

En appliquant cette formule aux parenthèses de l'expression (d), on trouve

$$4r^4 - 16\varrho_0 r^3 + 24\varrho_0^2 r^2 - 16\varrho_0^3 r + 4\varrho_0^4 + \pi^2 r^2 \varrho_0^2 + \pi^2 r^4$$
$$- 2\pi^2 \varrho_0 r^3 = 16r^4 - 32\varrho_0 r^3 + 24\varrho_0^2 r^2 - 8\varrho_0^3 r + \varrho_0^4,$$

Ou, en réunissant tous les termes contenant des mêmes puissances de r et ordonnant selon les exposants décroissants, il vient

$$(\pi^2 - 12)\, r^4 + (16 - 2\pi^2 \varrho_0)\, r^3 + \pi^2 \varrho_0^2\, r^2 - 8\varrho_0^3 r + 3\varrho^4 = 0$$

Si l'on fait $\varrho_0 = 1$, cette équation s'écrit :

$$(\pi^2 - 12)\, r^4 + (16 - 2\pi^2)\, r^3 + \pi^2 r^2 - 8r + 3 = 0.$$

Elle est vérifiée pour

$$r = 0{,}8324.$$

On s'en assure en remplaçant r par cette valeur dans l'équation et en effectuant les opérations, ce qui donne :

$$\log r^4 = \bar{1}{,}6813284$$
$$+\log(\pi^2 - 12) = 0{,}3284603$$
$$\log(\pi^2 - 12)\, r^4 = 0{,}0097887$$
$$(\pi^2 - 12)\, r^4 = -1{,}022795$$
$$\log r^2 = \bar{1}{,}8406642$$
$$+\log \pi^2 = 0{,}9942997$$
$$\log \pi^2 r^2 = 0{,}8349639$$
$$\pi^2 r^2 = 6{,}838547$$

$$\lg r^3 = \bar{1}{,}7609963$$
$$+\lg(16 - 2\pi^2) = 0{,}5727796.4$$
$$\lg(16 - 2\pi^2)\, r^3 = 0{,}3337759{,}4$$
$$(16 - 2\pi^2)\, r^3 = -2{,}156631$$
$$\lg r = \bar{1}{,}9203321$$
$$+\log 8 = 0{,}9030900$$
$$\lg 8r = 0{,}8234221$$
$$8r = 6{,}659200$$

Somme algébrique :

Termes négatifs :

$$(\pi^2 - 12)\, r^4 = -1{,}022795$$
$$(16 - 2\pi^2)\, r^3 = -2{,}156631$$
$$-8r = -6{,}659200$$

Sommes des termes négatifs $= -9{,}838626$

Somme des termes positifs. $= +9{,}838547$

Total $= -0{,}000079$

Termes positifs : $3{,}000000$

$\pi^2 r^2 = 6{,}838547$

Somme des termes positifs $= 9{,}838547$

Si $r = 0{,}8324$ était la valeur tout-à-fait exacte de l'inconnue, ce total devrait être rigoureusement nul d'après notre équation. On voit qu'il y a un petit écart négatif, tout-à-fait insignifiant du reste au point de vue pratique, car, r étant une

longueur en millimètres, il suffit d'en connaître les 3 ou 4 premières décimales.

Il faut encore déterminer l'angle β. Les équations (b) et (c) divisées membre à membre donnent

$$\frac{\pi r(\varrho_0 - r)}{2(r-\varrho_0)^2} = \frac{(2r-\varrho_0)^2 \sin\beta}{(2r-\varrho_0)^2 \cos\beta},$$

ou

$$\frac{\pi r(\varrho_0 - r)}{2(r-\varrho_0)^2} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \text{tang.}\,\beta,$$

ou encore, en changeant $(r-\varrho_0)$ en $(\varrho_0 - r)$ au dénominateur, ce qui est permis sans changement de signe, puisque $(r-\varrho_0)$ y figure au carré,

$$\frac{\pi r(\varrho_0 - r)}{2(\varrho_0 - r)^2} = \frac{\pi r}{2(\varrho_0 - r)} = \text{tang.}\,\beta,$$

car un des facteurs $(\varrho_0 - r)$ disparaît ; donc

$$\text{tang.}\,\beta = \frac{\pi r}{2(\varrho_0 - r)}.$$

Faisons $\varrho_0 = 1$. Il vient

$$\text{tang.}\,\beta = \frac{\pi r}{2(1-r)}.$$

Nous avons vu que r est < 1 ; comme il ne peut pas être négatif, tang. β est certainement positif. L'angle β ne peut donc appartenir qu'au premier quadrant ou au troisième. S'il appartenait au troisième, β serait plus grand que 180°. Or les constructions pratiques montrent que ce deuxième arc de cercle est ordinairement capable d'un angle $< 180°$. C'est donc l'angle du 1er quadrant que nous prendrons.

Le calcul est le suivant :

$r = 0{,}8324$	$\log.\,\pi = 0{,}4971499$
$1 - r = 0{,}1676$	$+ \log.\,0{,}8324 = \bar{1}{,}9203321$
$2(1-r) = 0{,}3352$	$\log.\,\pi r = 0{,}4174820$
	$\log.\,2(1-r) = \bar{1}{,}5253040$
	$\log.\,\text{tang.}\,\beta = 0{,}8921780$

$$\beta = 82°\,41'\,44'',2.$$

Remarque. — Quand on a un angle à déterminer, il vaut mieux le faire par sa tangente que par son sinus ou son cosinus; car, dans le cas particulier d'un angle β voisin d'un angle droit, la variation de la tangente pour une variation donnée de l'angle est beaucoup plus considérable que celle du cosinus ou du sinus. On ne se sert de ces dernières lignes pour le calcul de β que si la tangente est inconnue ou si elle n'est pas déterminable.

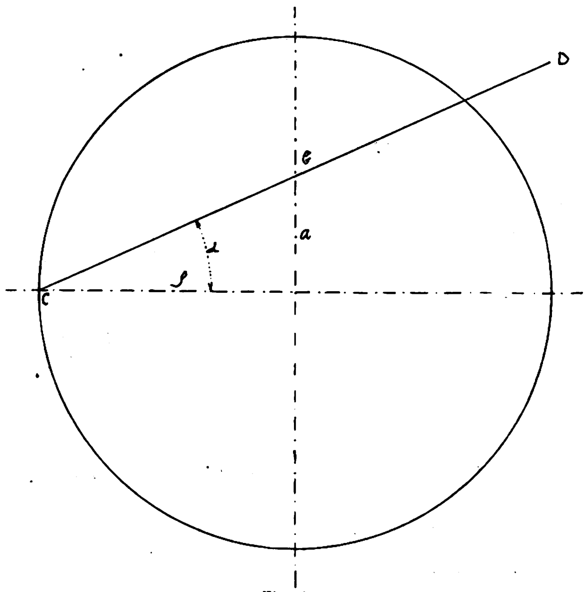


Fig. 178.

Ainsi donc une courbe terminale peut être formée de deux arcs de cercle raccordés, à la condition de prendre un premier arc de rayon (le rayon ρ_0 des spires étant égal à 1) $r = 0,8324$ et sous-tendant 180^0, puis un second arc de rayon $r' = 0,6648$ raccordé au premier et sous-tendant un angle $\beta = 82^0\ 41'\ 44'', 2$.

674. — **Forme terminale droite.** — Il existe une autre forme de ligne terminale. Elle est constituée par une droite.

Si nous prenons (fig. 178) CG égal à GD, le centre de gravité de cette droite sera certainement en G. La première condition de Phillips est ainsi vérifiée.

Remarquons en outre que la deuxième condition exige que

$$l.\,a = \rho^2.$$

Mais on a

$$l = 2\sqrt{a^2 + \rho^2},$$

ρ étant le rayon du spiral et a la distance du centre de gra-

vité G de la courbe terminale au centre O du spiral; dès lors

$$\frac{\varrho^2}{a} = 2\sqrt{a^2+\varrho^2}$$

ou, en élevant au carré,

$$\frac{\varrho^4}{a^2} = 4(a^2+\varrho^2) = 4a^2 + 4\varrho^2.$$

Posons $\varrho = 1$. Alors la longueur l de la droite CD et la distance a sont exprimées en parties de ϱ. On aura

$$a^4 + a^2 = \frac{1}{4}.$$

Si $a^2 = x$ pour abréger, alors

$$a^4 = x^2$$

et

$$x^2 + x - \frac{1}{4} = 0,$$

d'où

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{2}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}},$$

et comme

$$a^2 = x$$

$$a = \pm\sqrt{x} = \pm\sqrt{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}}}$$

log. $0{,}5 = \bar{1}{,}6989700$	Nomb. corr. $= 0{,}707107$	log. $0{,}207107 = \bar{1}.3161948$
log. $\sqrt{0{,}5} = \bar{1}{,}8494850$	$- 0.5$	$^1/_2 = \bar{1}{,}6580974$

et

$$-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \quad 0{,}207107$$

$$a = 0{,}45509 = tg\,\alpha, \text{ car } tg\,\alpha = \frac{a}{\varrho} = \frac{a}{1} = a.$$

d'où

$$\alpha = 24^0\, 28'11'', 5$$

Conclusions à la théorie des courbes terminales.

675.— Les courbes terminales Phillips présentent l'avantage d'un développement concentrique du spiral. Si le spiral ne possédait aucune inertie, ce serait un avantage de symétrie et nous n'aurions rien gagné à faire ces courbes terminales, ou du

moins nous n'y aurions gagné que l'isochronisme parfait des oscillations. Or, on sait que le spiral isochrone n'est nullement ce dont rêvent les chronométriers, attendu que l'isochronisme de la montre n'en résulte pas forcément. Il est en conséquence absurde de dire que la théorie de Phillips est inexacte en ce sens que les courbes terminales qu'il a calculées, n'assurent pas l'isochronisme de la montre. Phillips s'était proposé de résoudre un problème qui ne concernait que le spiral, et il en a donné la solution exacte et complète. Il avait en outre annoncé que le spiral réglant construit selon les principes qu'il pose, serait isochrone. Cette conclusion est rigoureusement vérifiée dans la pratique. Or cet isochronisme n'est possible que si le spiral se déforme concentriquement et si son centre de gravité demeure constamment sur l'axe du balancier; ces deux conditions avaient également été énoncées par Phillips comme nécessaires et suffisantes pour réaliser l'isochronisme, et l'on peut dire que ses calculs ne sont que les conséquences naturellement déduites de ces principes ; bien que le développement de ses calculs soit compliqué, la théorie de Phillips est venue à son heure poser les fondements mathématiques du réglage des spiraux.

On conçoit que la situation invariable du centre de gravité sur l'axe du balancier soit d'une importance capitale pour le réglage ; c'est à cette précieuse propriété que ce dernier doit de n'être presque pas influencé dans les quatre positions. De plus le spiral ainsi construit est absolument libre, de sorte que, soit au repos, soit pendant la déformation, aucune de ses parties ne subit une tension autre que celle qui résulte pour ses molécules de la déformation générale et qui est équilibrée par sa réaction élastique. Cela implique l'absence totale de pression ou de tension exercée par le spiral sur l'axe du balancier ; la réaction, égale à l'action qui est ici nulle, est donc aussi nulle : le spiral est libre. Enfin une conséquence toute spéciale de la théorie de Phillips est que les propriétés des spiraux munis de ces courbes terminales subsistent quel que soit l'angle de rotation du balancier ; la durée des oscil-

lations ne dépend donc pas de cet angle. On sait que le pendule, par exemple, ne jouit pas de cette propriété et que seules les oscillations de faible amplitude sont isochrones. Le calcul le fait voir et Galilée l'a formulé dans sa loi expérimentale.

Si donc, dans une montre munie d'un spiral à courbes terminales exactement exécutées, les grandes et les petites oscillations ne sont pas d'égale durée, il faudra en chercher la cause ailleurs que dans le spiral ; la théorie de Phillips en donne l'absolue certitude. Nous étudierons plus loin les influences des forces extérieures au spiral sur la marche de la montre.

676. **Construction pratique des courbes terminales déterminées graphiquement.** — Il s'agit maintenant de voir comment on arrive à construire dans la réalité les courbes terminales dessinées au préalable à une grande échelle.

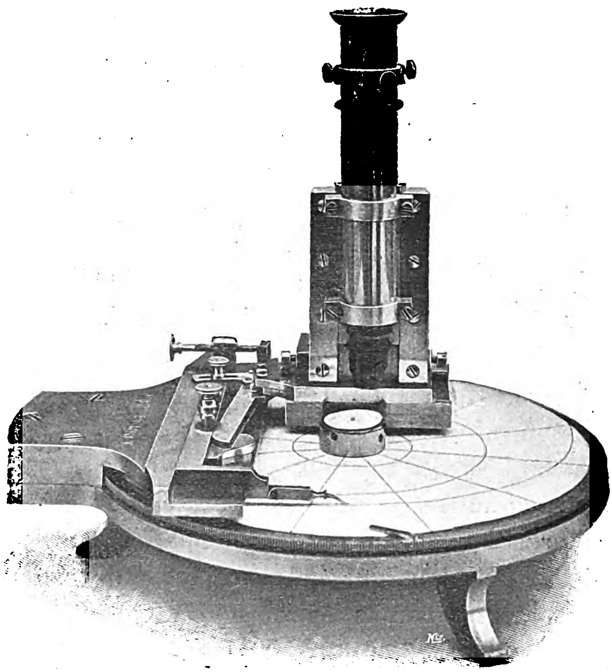


Fig. 179.

On peut, en première approximation, placer le spiral au centre du dessin et reproduire à vue d'œil la courbe terminale. Il est presque superflu de faire remarquer que cette façon d'opérer exige de l'habileté et n'est que peu exacte.

Il existe des instruments spéciaux permettant de déterminer la courbure des extrémités, de la vérifier sur le ressort ; leur manipulation est subordonnée à une acuité visuelle que

peu de personnes possèdent. Parmi ces instruments, l'un des plus simples est le « *campyloscope* » (fig. 179) inventé et construit par M. Paul Perret à la Chaux-de-Fonds. Les résultats qu'il donne sont très exacts. Voici le principe sur lequel il est basé.

Supposons (fig. 180) deux pièces métalliques rectilignes formant les deux côtés d'un angle CAB dont le sommet A est mobile dans la direction du côté AB. Soit UZ cette direction. L'ouverture de cet angle peut être réglée à volonté au moyen d'une vis à filets serrés. Le mouvement du système ne peut donc s'effectuer que suivant UZ.

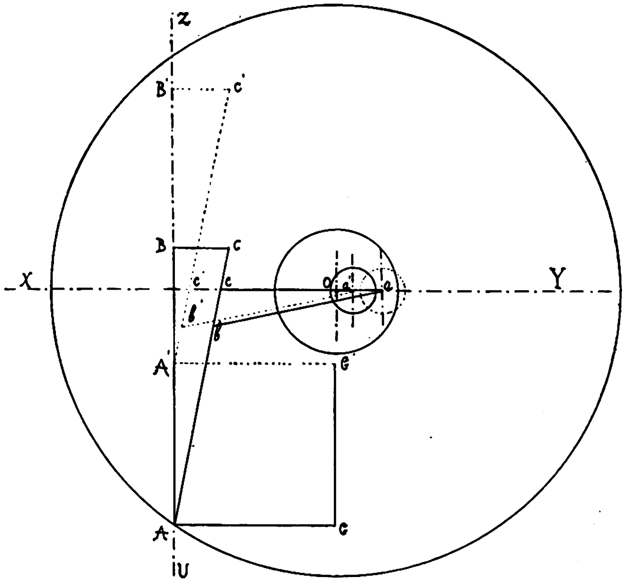


Fig. 180.

Supposons maintenant donné un triangle *abc* mobile également, mais suivant la direction XY perpendiculaire à UZ. En admettant que le mouvement du système *cab* soit déterminé par le glissement du côté CA sur l'une de ses faces *bc* et que ce mouvement s'effectue forcément suivant la direction XY, il est clair que les déplacements du point *a* seront proportionnels à ceux du point A, puisque les contacts entre les deux systèmes se font toujours sous le même angle. Le rapport des chemins parcourus par ces deux systèmes sera évidemment $\frac{AA'}{aa'}$, quel que soit le déplacement des pièces mobiles. Cela posé, munissons l'extrémité A d'une alidade AG invariablement fixée à la pièce AB en A. Si je déplace l'extrémité G

sur une droite GG', le point a parcoura une droite égale à $GG' \times \frac{aa'}{AA'}$. Nous avons ainsi construit une échelle de réduction enregistreuse. On peut s'arranger de manière que aa' soit très petit. Pour cela, il suffira de faire varier l'ouverture de l'angle CAB. On observera alors les déplacements de a au moyen d'un microscope.

Le système ainsi défini ne convient que pour la réduction des déplacements rectilignes tels que GG'. Je suppose qu'au lieu de suivre avec l'extrémité G de l'alidade une droite, je veuille suivre une courbe supposée, non représentée sur la figure 180. Soit G un point de cette courbe, F un point suivant. G ne pouvant se déplacer que suivant GO', il faut, pour pouvoir faire coïncider G avec F, faire tourner autour de O la plaque portant le dessin de ma courbe, jusqu'à ce que le point F vienne en F'. Puisqu'il est sur la direction GG', je puis y amener l'extrémité G de l'alidade. Pendant ce temps l'extrémité a s'est aussi déplacée, suivant la loi que nous connaissons et s'est arrêtée à un point f' tel que $a'f' = GF' \frac{aa'}{AA'}$. Mais, comme la platine où s'inscrivent les déplacements de a, a aussi tourné en même temps que le dessin, le point f' sera donc situé par rapport à a' de la même manière que F' l'est par rapport à G. Ce qui signifie que la courbe décrite sur la platine tournante sera semblable à la courbe donnée.

Cela étant, je puis imaginer le dessin à grande échelle placé sur la plaque tournante en même temps que la pièce à courbes terminales à vérifier. Cette dernière aura naturellement une position à déterminer. La pièce tournera donc avec le dessin. Admettons qu'au commencement de l'opération le point G coïncide avec le point initial du dessin de la courbe terminale et que le point a du triangle mobile $a\,b\,c$ coïncide avec le point initial de la courbe terminale du spiral à vérifier. Faisons tourner le système. Si j'amène alors le point G en coïncidence successive avec tous les points de la courbe dessinée qui se trouveront sur la droite GG' pendant la rotation,

j'aurai en *a*, pour chacun de ces points, un point correspondant sur la courbe du spiral. Si la courbe du spiral est exactement tracée, cette correspondance sera parfaite, c'est-à-dire que le point *a* suivra exactement la courbe terminale. Si au contraire il y a des irrégularités dans l'exécution, on s'en rendra compte par le fait que le point *a*, qu'on observe au microscope, sera situé en dehors ou en dedans de la courbe du spiral. On pourra alors corriger la défectuosité du tracé. Afin de reconnaître en tout temps le centre du champ visuel du microscope, on le munit d'un réticule le plus souvent composé de deux fils très fins se croisant à angle droit sur le centre.

La précision du fonctionnement de cet appareil est subordonnée à la parfaite exécution de chacune de ses parties. C'est la raison pour laquelle le prix de cet instrument est très élevé. On peut en voir un exemplaire à l'Ecole d'horlogerie de la ville de Neuchâtel.

Influences extérieures indépendantes du balancier et du spiral.

677. — **Influence du jeu du spiral entre les goupilles de la raquette.** — Dans une montre pourvue d'une raquette, la lame du spiral doit passer entre les deux goupilles dont cette pièce est munie ; le déplacement de la raquette a donc pour effet d'allonger ou de raccourcir la partie active du spiral suivant la marche de la montre. Ces goupilles peuvent enserrer le spiral ou lui laisser un jeu plus ou moins considérable. Dans ce dernier cas, il est évident que la marche de la montre en sera influencée et qu'il en résultera non seulement un retard, mais aussi une inégalité dans la durée des grandes et des petites oscillations : le mouvement ne sera plus isochrone.

678. — Examinons tout d'abord le cas où, le balancier étant au repos, la lame du spiral se trouve au milieu de

l'intervalle des deux goupilles (fig. 181). Si l'on fait tourner le balancier d'un certain angle très petit, la longueur totale du spiral, c'est-à-dire la longueur comprise entre le point b, où le spiral se détache de la virole, et le point b' où il s'attache au piton, ne sera plus tout entière active. En effet, après une rotation α_1 du balancier, la lame du spiral viendra s'appuyer sur l'une des goupilles et, à partir de ce moment, la longueur active du spiral n'est plus que celle qui est comprise entre les goupilles et la virole. Il y aura donc une perturbation dans les oscillations et l'isochonisme sera détruit. Nous allons chercher à évaluer l'amplitude de cette perturbation et la différence qu'elle entraîne dans la durée d'une oscillation.

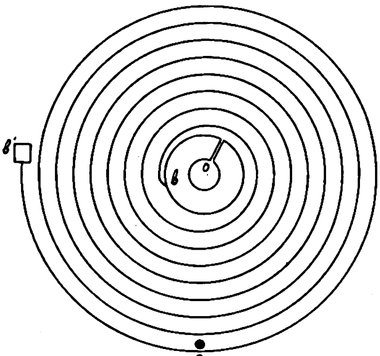


Fig. 181.

Soit L′ la longueur comprise entre les goupilles et la virole, et l la longueur entre le piton et les goupilles. La longueur totale est donc

$$L = L' + l.$$

Lorsque le balancier s'éloigne de sa position de repos OH (fig. 182), il décrit l'angle α_1 tout d'abord, et le temps qu'il met à décrire cet angle est exprimé par (648)

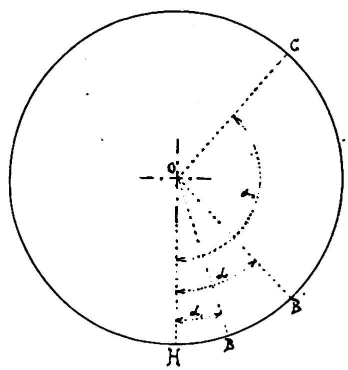


Fig. 182.

$$t_1 = \sqrt{\frac{A}{M}} \text{ arc sin } \frac{\alpha_1}{\alpha_0},$$

où (641)

$$M = \frac{E e^3 h}{12 L}$$

Posons

$$\frac{E\,e^3\,h}{12} = K;$$

il vient

$$M_1 = \frac{K}{L'} \text{ et } M_2 = \frac{K}{L' + l},$$

suivant l'une ou l'autre période du mouvement que nous considérons. Le temps s'écrit alors :

$$t_1 = \sqrt{\frac{A\,(L' + l)}{K}} \text{ arc sin } \frac{\alpha_1}{\alpha_0},$$

car le temps t_1 correspond encore au cas où la longueur du spiral n'est pas diminuée. Le moment moteur est alors représenté par $M_2\alpha_1$. Si le balancier continue son mouvement au delà de la position qu'il prend par une rotation de α_1, par exemple jusqu'à la valeur α de l'angle de rotation, le moment moteur sera modifié. Il subira une augmentation de

$$\frac{K}{L'}(\alpha - \alpha_1),$$

la longueur active étant L′ pour les angles plus grands que α_1 selon nos conventions. Le moment moteur est donc

$$M = \frac{K\,\alpha_1}{L' + l} + \frac{K}{L'}(\alpha - \alpha_1) = \left(\frac{K}{L' + l} - \frac{K}{L'}\right)\alpha_1 + \frac{K}{L'}\alpha$$

ou

$$M = \frac{K}{L'}\left(\alpha - \frac{\alpha_1\,l}{L' + l}\right).$$

Et comme en général on a

$$A\frac{d\,\omega}{dt} = \text{somme des moments moteur } M,$$

il vient

$$(1) \qquad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{K}{A\,L'}\left(\alpha - \frac{\alpha_1\,l}{L' + l}\right),$$

car le moment M est négatif puisqu'il s'oppose à la rotation. Rappelons que, dans cette formule, A désigne le moment

d'inertie des pièces en mouvement et que la vitesse angulaire ω est définie par la relation

$$(2) \qquad \alpha = \omega\, t,$$

où t est le temps. Si $t = 1$,

$$\alpha = \omega.$$

La vitesse est donc l'angle décrit pendant l'unité de temps. De (2) on tire

$$d\alpha = \omega\, dt,$$

d'où

$$dt = \frac{d\alpha}{\omega}.$$

Alors (1) devient

$$\omega\, d\omega = -\frac{K}{A L'}\left(\alpha - \frac{\alpha_1 l}{L' + l}\right) d\alpha.$$

En intégrant de α_0 à α, il vient :

$$\frac{\omega^2}{2} = -\frac{K}{AL'}\left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha_1 l}{L'+l}\alpha\right)\Bigg|_{\alpha_0}^{\alpha} = \frac{K}{AL'}\left(\frac{\alpha_0^2}{2} - \frac{\alpha_1 l}{L'+l}\alpha_0 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha_1 l}{L'+l}\alpha\right),$$

d'où

$$\omega^2 = \frac{K}{A L'}\left(\alpha_0^2 - \alpha^2 + \frac{2\,\alpha_1 l}{L' + l}\alpha - \frac{2\,\alpha_1 l}{L' + l}\qquad\right).$$

Or

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt},$$

donc

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{K}{A L'}\left(\alpha_0^2 - \frac{2\,\alpha_1 l}{L' + l}\alpha_0 + \frac{2\,\alpha_1 l}{L' + l}\alpha - \alpha^2\right)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{\frac{K}{A L'}} \cdot \sqrt{\alpha_0^2 - \frac{2\,\alpha_1 l}{L'+l}\alpha_0 + \frac{2\,\alpha^1 l}{L'+l}\alpha - \alpha^2}.$$

Posons

$$\alpha_0^2 - \frac{2\,\alpha_1 l}{L' + l}\alpha_0 = a$$

$$\frac{2\,\alpha_1 l}{L' + l} = b.$$

Alors

$$dt = \sqrt{\frac{A\,L'}{K}}\ \frac{d\alpha}{\sqrt{a + b\,\alpha - \alpha^2}},$$

d'où, en intégrant:

$$t = \sqrt{\frac{A\,L'}{K}} \int \frac{d\alpha}{\sqrt{a + b\,\alpha - \alpha^2}} + C,$$

C étant une constante d'intégration.

Or, une intégration analogue à celle de (686) donne

$$\int \frac{d\alpha}{\sqrt{a + b\,\alpha - \alpha^2}} = \text{arc sin}\ \frac{\alpha - \frac{b}{2}}{\sqrt{a + \frac{b}{4}}}$$

$$= \text{arc sin}\ \frac{\alpha - \frac{\alpha_1 l}{L' + l}}{\sqrt{\alpha_0{}^2 - \frac{2\,\alpha_1 l}{L' + l}\,\alpha_0 + \left(\frac{\alpha_1 l}{L' + l}\right)^2}}$$

$$= \text{arc sin}\ \frac{\alpha - \frac{\alpha_1 l}{L' + l}}{\alpha_0 - \frac{\alpha_1 l}{L' + l}},$$

car l'expression sous le radical est un carré parfait. Donc

$$t = \sqrt{\frac{A\,L'}{K}}\ \text{arc sin}\ \frac{\alpha - \frac{\alpha_1 l}{L' + l}}{\alpha_0 - \frac{\alpha_1 l}{L' + l}} + C.$$

Pour $\alpha = \alpha_1$, $t = 0$; donc

$$0 = \sqrt{\frac{A\,L'}{K}}\ \text{arc sin}\ \frac{\alpha_1 - \frac{\alpha_1 l}{L' + l}}{\alpha_0 - \frac{\alpha_1 l}{L' + l}} + C,$$

d'où

$$C = -\sqrt{\frac{A\,L'}{K}}\ \text{arc sin}\ \frac{\alpha_1 - \frac{\alpha_1 l}{L' + l}}{\alpha_0 - \frac{\alpha_1 l}{L' + l}}.$$

D'ailleurs, pour

$$\alpha = \alpha_0,\ t = t_2.$$

En conséquence,

$$t_2 = \sqrt{\frac{A\,L'}{K}} \arcsin \frac{\alpha_0 - \frac{\alpha_1 l}{L'+l}}{\alpha_0 - \frac{\alpha_1 l}{L'+l}} + C. = \sqrt{\frac{A\,L'}{K}} \arcsin 1 + C.$$

Or l'arc dont le sinus est 1 est égal à $\frac{\pi}{2}$; donc

$$t_2 = \sqrt{\frac{A\,L'}{K}} \cdot \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{A\,L'}{K}} \text{ arc } \sin \frac{\alpha_1 - \frac{\alpha_1 l}{L'+l}}{\alpha_0 - \frac{\alpha_1 l}{L'+l}}$$

ou

$$t_2 = \sqrt{\frac{A\,L'}{K}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \text{arc } \sin \frac{\alpha_1 - \frac{\alpha_1 l}{L'+l}}{\alpha_0 - \frac{\alpha_1 l}{L'+l}} \right\}.$$

On verrait en faisant une figure qu'on peut aussi écrire

$$t_2 = \sqrt{\frac{A\,L'}{K}} \text{ arc } \cos \frac{\alpha_1 - \frac{\alpha_1 l}{L'+l}}{\alpha_0 - \frac{\alpha_1 l}{L'+l}}.$$

La durée d'une demi-oscillation $\frac{T}{2}$ sera donc donnée par

$$\frac{T}{2} = t_1 + t_2$$

ou

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{A(L'+l)}{K}} \text{arc } \sin \frac{\alpha_1}{\alpha_0} + \sqrt{\frac{A\,L'}{K}} \text{ arc } \cos \frac{\alpha_1 - \frac{\alpha_1 l}{L'+l}}{\alpha_0 - \frac{\alpha_1 l}{L'+l}}.$$

679. **Calcul numérique de l'équation précédente.** — Supposons donnés :

$T = 0{,}2$ sec. $L' = 226\ ^m/_m$, $l = 7\ ^m/_m$, $\alpha_1 = 20^0$, $\alpha_0 = 300^0$.
On sait que

$$T = \pi \sqrt{\frac{A\,L'}{K}},\ \text{d'où}\ \frac{A}{K} = \frac{T^2}{\pi^2 L'}.$$

$$\left.\begin{array}{r}\log L' = 2,3541084 \\ \log \pi^2 = \underline{0,9942997}\end{array}\right| +$$

$$\log \pi^2 L' = 3,3484081$$

$$\left.\begin{array}{r}\log T^2 = \bar{2},6020600 \\ \log \pi^2 L' = \underline{3,3484081}\end{array}\right| -$$

$$\left.\begin{array}{r}\log \frac{A}{K} = \bar{5}.2536519 \\ \log (L' + l) = \underline{2,3673559}\end{array}\right| +$$

$$\log \frac{A}{K}(L' + l) = \bar{3}.6210078$$

$$\log \sqrt{\frac{A}{K}(L' + l)} = \bar{2},8105029$$

La durée d'une demi-oscillation étant de $\frac{T}{2} = \frac{0,2}{2}$ sec. $= 0,1$ sec, il y aura

$$\frac{86400}{0,1} = 864000 \text{ demi-oscillations en 24 heures.}$$

et il faudra, si la montre ne subit pas de perturbation, que

$$864000 \frac{T}{2} = 864000\, t_1 + 864000 t_2 = 86400 \text{ secondes.}$$

ou bien

$$86400 = 864000 \left[\sqrt{\frac{A(L'+l)}{K}} \arcsin \frac{\alpha_1}{\alpha_0} + \sqrt{\frac{A\,L'}{K}} \arccos \frac{\alpha_1 - \frac{\alpha_1 l}{L'+l}}{\alpha_0 - \frac{\alpha_1 l}{L'+l}} \right].$$

Calculons maintenant $\arcsin \frac{\alpha_1}{\alpha_0}$.

On a

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \frac{20^0}{300^0} = 0,06666\ldots\ldots\ldots = \frac{6}{90}.$$

$$\log \frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \log 6 - \log 90.$$

$$\left.\begin{array}{r}\log 6 = 0,7781513 \\ \log 90 = \underline{1,9542425}\end{array}\right| -$$

$$\log \frac{6}{90} = \bar{2}.8239088 = \lg \sin\left(\arcsin \frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right).$$

Ce sinus correspond donc à l'arc

$$3^0\ 49'\ 21'',2. = 3^0,82255.$$

Il faut exprimer cet angle en fraction de rayon.

On sait que

$2\,\pi\,r$ correspond à 360^0. Si $r = 1$

$2\,\pi$ » 360^0; donc

π » 180^0. Réciproquement

$$1^\circ \text{ correspond à } \frac{\pi}{180} = 0{,}0174533.$$

Donc $3^\circ{,}82255$ correspond à $0{,}0174533 \times 3^0{,}82255 =$

0,0667161 parties du rayon

$$\log 0{,}0667161 = \bar{2}{,}8242305.7$$

$$+ \log \sqrt{\frac{A}{K}(L' + l)} = \bar{2}{,}8105039$$

$$+ \log 864000 = 5{,}9365137$$

$$\log\left(864000 \sqrt{\frac{A}{K}(L'+l)} \text{ arc sin } \frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right) = 3{,}5712481.7 = \log(864000 t_1)$$

d'où

$$864000\, t_1 = 3726^{\text{sec}}{,}04$$

Calcul du terme $864000\, t_2 . = 864000 \sqrt{\frac{A}{K}} L' \text{ arc cos } \dfrac{\alpha_1 - \dfrac{\alpha_1 l}{L' + l}}{\alpha_0 - \dfrac{\alpha_1 l}{L' + l}}$..

$\alpha_1 = 20^\circ = 0{,}3490659$ parties de rayon $\log \alpha_1 = \bar{1}.5429074.$

$\alpha_0 = 300^\circ = 5{,}2359877$ » » $\log \alpha_0 = 0{,}7189987.$

$$\log \alpha_1 = \bar{1}{,}5429074$$

$$+ \log l = 0{,}8450980$$

$$\log \alpha_1 l = 0{,}3880054$$

$$-\log(L' + l) = 2{,}3673559$$

$\log \dfrac{\alpha_1 l}{L' + l} = \bar{2}.0206495$ Nombre correspondant $= 0{,}0104869 = \dfrac{\alpha_1 l}{L' + l}$

$\alpha_1 = 0{,}3490659$ $\qquad\qquad$ $\alpha_0 = 5{,}2359877$

$-\dfrac{\alpha_1 l}{L' + l} = 0{,}0104869$ $\qquad$ $-\dfrac{\alpha_1 l}{L' + l} = 0{,}0104869$

$\alpha_1 - \dfrac{\alpha_1 l}{L' + l} = 0{,}3385790$ $\qquad$ $\alpha_0 - \dfrac{\alpha_1 l}{L' + l} = 5.2255008$

$$\log\left(\alpha_1 - \frac{\alpha_1\, l}{L'+l}\right) = \bar{1},5296600$$

$$- \log\left(o_0 - \frac{\alpha_1\, l}{L'+l}\right) = \underline{0,7181279}$$

$$\log\left(\frac{\alpha_1 - \frac{\alpha_1\, l}{L'+l}}{\alpha_0 - \frac{\alpha_1\, l}{L'+l}}\right) = \bar{2}.8115321 = \lg\cos\left\{\operatorname{arc}\cos\left(\frac{\alpha_1 - \frac{\alpha_1\, l}{L'+l}}{\alpha_0 - \frac{\alpha_1\, l}{L'+l}}\right)\right\}.$$

Ce log. correspond donc à l'arc $\varphi = 86^o\,17'5''.99 =$ $86^o,28349 = 1.5059572$ parties de rayon.

$$\log \varphi = 0,1778126$$

$$+ \log 864000\sqrt{\frac{A\,L'}{K}} = \underline{4,7403939}$$

$$\log(864000\, t_2) = 4,9182065$$

$$864000\, t_2 = 82833.59$$

$$+ 864000\, t_1 = \underline{\ 3726.04}$$

$$864000\,\frac{T}{2} = 86559.63 \text{ secondes.}$$

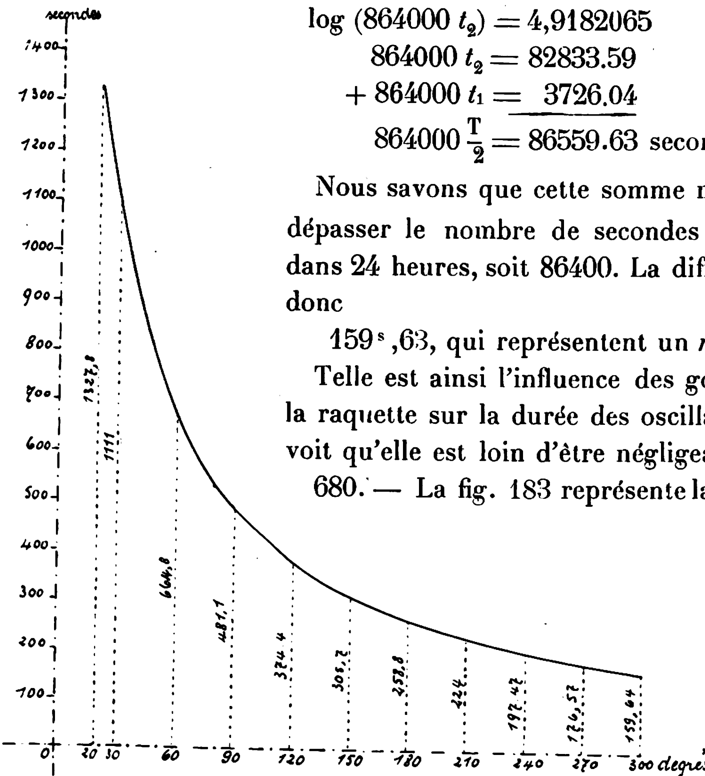


Fig. 183.

Nous savons que cette somme ne doit pas dépasser le nombre de secondes contenues dans 24 heures, soit 86400. La différence est donc

159 s,63, qui représentent un *retard*.

Telle est ainsi l'influence des goupilles de la raquette sur la durée des oscillations. On voit qu'elle est loin d'être négligeable.

680. — La fig. 183 représente la construction de la courbe obtenue en prenant pour abscisses les amplitudes des α_0 des oscillations du balancier et pour ordonnées les retards en se-

condes de la montre en 24 heures. On a envisagé ici le cas particulier où les goupilles de la raquette sont à une distance telle l'une de l'autre qu'il faille faire décrire au balancier un angle de $\pm$ 20° à partir de sa position de repos pour produire un contact du fil du spiral et de l'une des goupilles, c'est-à-dire

$$\alpha_1 = \pm 20^\circ.$$

La courbe obtenue est la courbe des retards. Elle est donc représentée par l'expression

$$y = f(\alpha_0)$$

ou

$$y = 864000\left\{\sqrt{\frac{A(L'+l)}{K}}\text{arc sin}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)+\sqrt{\frac{AL'}{K}}\text{arc cos}\left(\frac{\alpha_1-\frac{\alpha_1 l}{L'+l}}{\alpha_0-\frac{\alpha_1 l}{L'+l}}\right)\right\}-86400.$$

On l'obtiendra par points en faisant varier la valeur de α_0 et en calculant la valeur de y qui lui correspond dans chaque cas. On porte alors a sur Ox et y sur Oy. Le point de rencontre des parallèles aux axes menées par ces points sera un point de la courbe cherchée.

Cette courbe montre que le retard, grand pour de faibles amplitudes, diminue rapidement à mesure que l'amplitude augmente. On voit que ce retard ne tend pas à s'annuler pour des amplitudes toujours croissantes, mais qu'il garde une valeur assez grande.

On peut se servir de cette courbe pour calculer la différence de marche d'une montre dans deux positions. Nous verrons plus loin que le frottement des pivots du balancier est environ trois fois plus grand quand la montre est placée dans la position verticale que lorsqu'elle se trouve dans la position horizontale ; il résulte de là que, dans cette dernière position, les amplitudes des oscillations sont de 60 à 90° plus grandes que dans la première. Or, si nous admettons qu'un balancier exécute 1,5 tours dans la position horizontale, ce qui correspond à un angle α_0 de 270°, le jeu du spiral produira, dans les conditions qui ont servi à tracer la courbe ci-contre, un retard diurne de 176 secondes. Si le balancier décrit 60° de moins dans la position verticale, nous aurons alors $\alpha_0 = 240°$ et la

montre retardera de 197 secondes. La différence de marche sera de 21 secondes entre ces deux positions.

L'huile épaissie influera aussi sur le retard, puisqu'elle influe sur les frottements. La conclusion pratique à tirer de cette étude est la suivante : *Si une montre retarde au pendu, on examinera tout d'abord si le spiral a du jeu entre les goupilles de la raquette et on le supprimera s'il y a lieu.*

681. — Examinons maintenant le cas où, le balancier étant au repos, la lame du spiral butte avec une certaine force contre l'une ou l'autre des goupilles, l'intérieure par exemple. Il faudra, pour lui faire quitter ce contact, dérouler le spiral d'un angle que nous appellerons α_1. Admettons de plus que l'autre goupille soit suffisamment éloignée de la première pour que le spiral ne puisse l'atteindre dans le mouvement. La ligne pointillée (fig. 184) représente la position que prendrait la lame du spiral si elle était libre, c'est-à-dire si la goupille n'existait pas. Nous allons déterminer par le calcul l'influence de cette disposition particulière des goupilles sur la durée des oscillations.

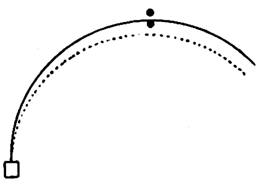


Fig. 184.

Nous aurons, comme dans le cas précédent, deux périodes distinctes à envisager dans le mouvement du balancier : la première t_1 sera celle pendant laquelle le balancier décrit l'angle α_1 compté à partir de sa position d'équilibre H (figure 185).

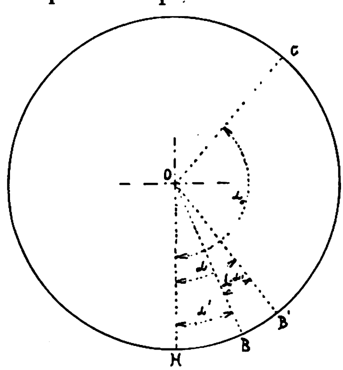


Fig. 185.

Nous savons que pendant ce temps la longueur active du spiral est L', si l'on conserve les mêmes notations que précédemment. Nous aurons donc

$$t_1 = \sqrt{\frac{A L'}{K}} \arcsin \frac{\alpha_1}{\alpha_0}.$$

La seconde période t_2 est celle qui correspond à l'angle $\alpha_0 - \alpha_1$. La longueur active du spiral a augmenté de l; elle est donc

$$L' + l.$$

Si l'angle décrit B'OH est α, le moment moteur du spiral sera

$$M = \frac{K}{L'} \cdot \alpha_1 + \frac{K}{L' + l}(\alpha - \alpha_1) \cdot = \frac{K}{L' + l}\left(\frac{\alpha_1 l}{L'} + \alpha\right) \cdot$$

et, comme dans le cas précédent,

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{K}{A(L' + l)}\left(\frac{\alpha_1 l}{L'} + \alpha\right);$$

d'où, en intégrant,

$$\omega^2 = -\frac{K}{A(L' + l)}\left(\frac{2\alpha_1 l}{L'} \cdot \alpha + \alpha^2\right) + C.$$

Si $\alpha = \alpha_0$, la vitesse ω est nulle, donc

$$0 = -\frac{K}{A(L' + l)}\left(\frac{2\alpha_1 l}{L'} \cdot \alpha_0 + \alpha_0^2\right) + C,$$

d'où

$$C = \frac{K}{A(L' + l)}\left(\frac{2\alpha_1 l}{L'}\alpha_0 + \alpha_0^2\right).$$

Donc

$$\omega^2 = \frac{K}{A(L' + l)}\left(\alpha_0^2 + \frac{2\alpha_1 l}{L'} \cdot \alpha_0 - \frac{2\alpha_1 l}{L'} \cdot \alpha - \alpha^2\right),$$

et, comme $d\alpha = \omega\, dt$,

$$\int_0^{t_2} dt = \sqrt{\frac{A(L' + l)}{K}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{a - b\alpha - \alpha^2}}$$

dans laquelle

$$a = \alpha_0^2 + \frac{2\alpha_1 l}{L}\alpha_0$$

et

$$b = \frac{2\alpha_1 l}{L'},$$

d'où (comme démontré par 686) :

$$t_2 = \sqrt{\frac{A(L' + l)}{K}}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{\alpha + \frac{\alpha_1 l}{L'}}{\alpha_0 + \frac{\alpha_1 l}{L'}}\right)\right)$$

et

$$t_2 = \sqrt{\frac{A(L'+l)}{K}} \text{arc cos} \left(\frac{\alpha + \frac{\alpha_1 l}{L'}}{\alpha_0 + \frac{\alpha_1 l}{L'}} \right).$$

Par conséquent, la durée totale d'une demi-oscillation $\frac{T}{2}$ sera

$$\frac{T}{2} = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{AL'}{K}} \text{arc sin} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right) + \sqrt{\frac{A(L'+l)}{K}} \text{arc cos} \left(\frac{\alpha + \frac{\alpha_1 l}{L'}}{\alpha_0 + \frac{\alpha_1 l}{L'}} \right).$$

Afin d'obtenir le temps que la montre emploie pour parcourir les 24 heures diurnes, il faudra multiplier le temps $\frac{T}{2}$ par le nombre 432 000 de demi-oscillations que le balancier exécute en un jour, à supposer que, ici, $T = 0{,}2$ sec. comme dans l'exemple précédent. On ne prend pas le nombre 864 000 parce que le spiral reste appuyé contre la goupille pendant que le balancier exécute son oscillation dans le sens de la contraction du spiral ; dans ce cas la longueur L' seule est active et il n'y aura en somme que la moitié du nombre total de demi-oscillations influencée par la cause pertubatrice.

682. — **Calcul numérique de l'équation précédente.** — En conservant les mêmes données que dans le problème précédent, c'est-à-dire

$T = 0.2$ sec. $\alpha_1 = 20°$, $\alpha_0 = 300°$ $L' = 226\ ^m/_m$ $l = 7\ ^m/_m$,

et, en faisant les calculs, que nous ne reproduisons pas parce qu'ils sont en tout semblables aux précédents, on obtient :

$$432000\ t_1 = 1834{,}8$$
$$432000\ t_2 = 41947$$
$$\text{Total} \quad 43781{,}8$$

On aura donc en 24 heures un retard de

$$43781{,}8 - 432000 = 581.8 \text{ sec.}$$

La fig. 186 représente la courbe de ces retards. La montre retarde donc par le fait de l'écartement des goupilles, mais

ici le retard est d'autant plus grand que l'amplitude des oscillations est plus grande. C'est donc tout l'opposé de ce qui

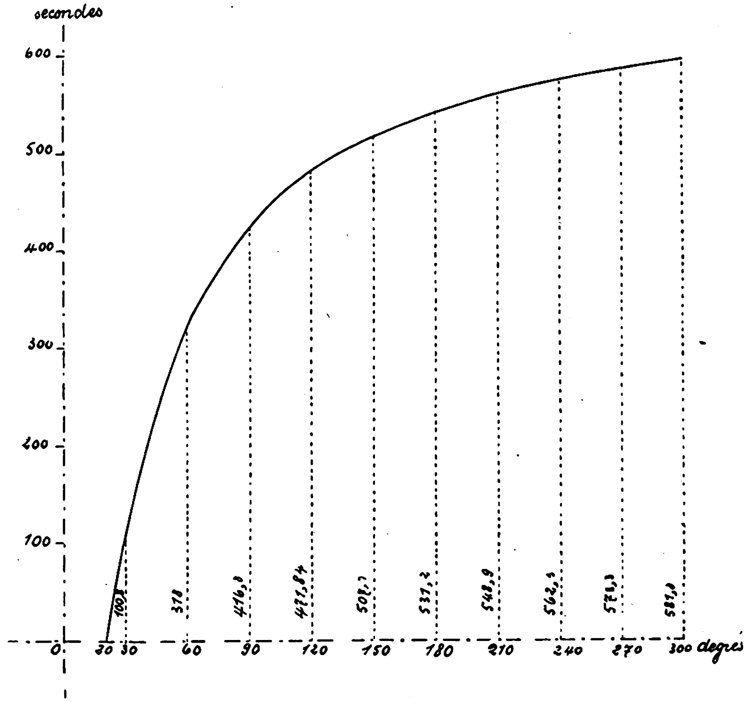


Fig. 186.

se passait dans l'exemple précédent, c'est ce que fait voir la courbe construite par points en suivant la relation

$$y = 432000 \left\{ \sqrt{\frac{A\,L'}{K}} \text{ arc sin} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right) + \sqrt{\frac{A(L'+l)}{K}} \text{ arc cos} \left(\frac{\alpha_1 + \frac{\alpha_1\, l}{L'+l}}{\alpha_0 + \frac{\alpha_1\, l}{L'+l}} \right) - \frac{1}{10} \right\}.$$

Ainsi, lorsqu'un balancier décrit 1 tour et demi, soit $\alpha_0 = 270°$, dans la position horizontale, la montre retardera de 573 secondes, ainsi que le fait voir le graphique; lorsqu'il ne parcourra plus que $\alpha_0 = 240°$, dans la position verticale, la montre ne retardera plus que de 562 secondes. *La montre avancera donc au pendu* de 11 secondes. On a pris pour le graphique comme abscisses les amplitudes α_0 exprimées en degrés, et comme ordonnées les retards correspondants y évalués en secondes par la formule qui vient d'être écrite.

683. — Ainsi le jeu de la lame du spiral entre les goupilles de la raquette a une *grande* influence sur la durée des oscillations. On peut imaginer d'autre cas que ceux que nous avons traités. La lame du spiral pourrait par exemple rencontrer l'autre goupille lorsque les oscillations sont grandes. Pour calculer la durée des oscillations, on considèrerait alors trois périodes. Ce que nous avons calculé, suffit cependant pour faire comprendre les raisons qui obligent à annuler le jeu du spiral entre les goupilles de raquette.

684. — Si les goupilles de la raquette sont entièrement fermées avant la mise en place du spiral, il peut arriver que la lame du spiral les fasse fléchir; dans ces conditions l'encastrement de cette extrémité du spiral n'est plus parfaite. Or Ed. Phillips a basé sa théorie sur un encastrement parfait. Le mouvement n'est donc plus isochrone.

685. — Considérons la fig. 181; en admettant que les goupilles de la raquette serrent la lame, il se produit une tension, qui aura pour effet de produire un petit glissement de la lame entre les goupilles, puisque le point b' est fixe. De plus, il en résultera que la tangente à la lame au point de contact avec les goupilles aura une direction variable, ce qui est contraire aux avantages d'un encastrement parfait. Une courbe théorique ne donnera par conséquent plus, dans ces conditions anormales, un développement concentrique. Remarquons encore une chose: le jeu du spiral, quoique constituant un défaut, peut dans certains cas compenser en une certaine mesure un autre défaut; il est cependant rare qu'un défaut en compense exactement un autre. Nous allons donner deux exemples où l'on verra une compensation de cette sorte à peu près réalisée.

Dans un balancier coupé en mouvement, la force centrifuge, par son action sur les vis ou sur les masses et sur une partie de la serge, fait varier le rayon de giration du balancier. L'augmentation qui en résulte, est plus grande lorsque le balancier exécute de grandes oscillations que lorsqu'il en exécute de petites. Cette influence est naturellement plus marquée

sur les balanciers dont la masse est plus considérable. C'est pour cette raison que les chronomètres de marine ont tendance à exécuter les petites oscillations dans un temps plus court que les grandes. Si l'on ménage alors un léger jeu entre les goupilles de préférence fixes, on pourra arriver à compenser, dans une certaine mesure, l'influence de la force centrifuge. Mais il est bon de faire remarquer que l'espoir d'une compensation parfaite est chimérique. Ajoutons encore que dans les montres de poche la force centrifuge vient en aide dans le réglage du plat ou du pendu.

686. — Un deuxième exemple de compensation d'un défaut par un autre nous est offfert par l'ingénieuse invention de l'échappement *à tourbillon* du célèbre horloger Abram-Louis Breguet, invention qui devait sans doute réaliser la marche isochronique dans les quatre positions verticales. Il enfermait le balancier, le spiral et l'échappement dans une cage qu'il faisait tourner à la vitesse d'un tour par minute. De cette manière une inégalité dans l'équilibre du balancier ou du spiral était compensée par le mouvement de rotation de la cage. On conçoit aisément que si, à un certain moment, l'excentricité du mobile se trouve en bas, une demi-minute après il se trouvera en haut et produira un effet contraire à celui qui a été produit dans le premier cas. Il est clair qu'on pourra employer n'importe quel genre d'échappement dans le système à tourbillon, mais on choisira de préférence celui qui donne les meilleurs résultats, par exemple l'échappement à ressort, à bascule ou à ancre.

Lorsqu'on règle un tourbillon en laissant les goupilles de la raquette entièrement fermées, il se produit une avance dans les petites oscillations et par suite une avance aussi dans la position verticale par rapport à la marche en position horizontale. Proposons-nous de rechercher la cause de cette variation et de donner l'expression mathématique de la loi qui la lie à l'amplitude de l'oscillation.

Si l'on regarde le mouvement du côté opposé au cadran, la cage se meut dans le sens de la flèche de la figure 187,

c'est-à-dire dans le sens opposé à celui des aiguilles d'une montre.

Si le tourbillon est pourvu d'un échappement à détente, le balancier reçoit une impulsion à chaque double oscillation. Ainsi le déplacement de la cage sa fait pendant que la roue d'échappement se déplace d'une dent. Si le balancier exécute 18000 oscillations par heure, il fait 150 doubles oscillations par minute. A chaque double oscillation la cage se déplace donc de $\frac{360^\circ}{150} = 2^\circ 24'$. Si maintenant nous nous arrangeons de façon à règler la position de la virole du spiral sur le balancier de telle sorte que la grande levée occupe la position indiquée par la fig. 187, le déplacement de la cage aura lieu assez exactement au moment où le balancier se trouve au commencement de la demi-oscillation ascendante. Le balancier possède alors un mouvement à droite, c'est-à-dire dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre ; l'extrémité supérieure du spiral, attachée au piton b, exécute une rotation à gauche de $2^\circ 24'$. Il suit de là que le moment de la force élastique du spiral qui agit en sens inverse du mouvement, est augmenté d'une quantité proportionnelle à $2^\circ 24'$. Si donc nous faisons abstraction de l'angle décrit correspondant au temps pendant lequel le balancier reçoit l'impulsion, on voit que dans la position de repos le moment moteur du spiral n'est pas nul.

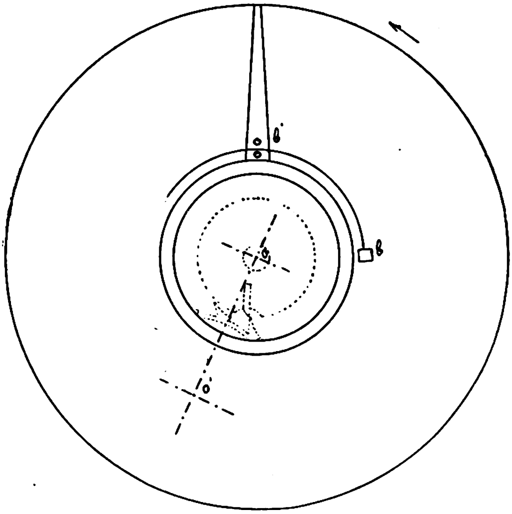


Fig. 187.

Posons

$$2^\circ 24' = \beta.$$

Nous avons, pour la demi-oscillation ascendante, (voir 643)

$$\omega \, d\omega = -\frac{M}{A}(\alpha - \beta)\, d\alpha.,$$

A étant le moment d'inertie du système,

$$\int \omega \, d\omega = -\frac{M}{A}\int \alpha \, d\alpha - \frac{M}{A}\beta \int d\alpha + C,$$

d'où

$$\omega^2 = -\frac{M}{A}\alpha^2 - 2\frac{M}{A}\beta\,\alpha + C.$$

Pour

$$\alpha = \alpha_0, \text{ on a } \omega = 0.$$

Ce qui donne

$$C = \frac{M}{A}(\alpha_0{}^2 + 2\,\alpha\,\beta);$$

donc

$$\omega^2 = \frac{M}{A}\left\{(\alpha_0{}^2 - \alpha^2) + 2\beta(\alpha_0 - \alpha)\right\},$$

d'où

$$\omega = \sqrt{\frac{M}{A}\left\{(\alpha_0{}^2 - \alpha^2) + 2\beta(\alpha_0 - \alpha)\right\}}.$$

Mais, comme

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt},$$

il vient

$$dt = \sqrt{\frac{A}{M}}\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0{}^2 + 2\beta\alpha_0 - 2\beta\alpha - \alpha^2}}.$$

Posons, pour abréger,

$$\alpha_0{}^2 + 2\beta\alpha_0 = a,$$
$$2\beta = b.$$

Alors

$$t = \sqrt{\frac{A}{M}}\int\frac{d\alpha}{\sqrt{a - b\alpha - \alpha^2}} + C.$$

Nous avons identiquement :

$$a - b\alpha - \alpha^2 = a + \frac{b^2}{4} - \left(\alpha + \frac{b}{2}\right)^2$$

$$= \left(a + \frac{b^2}{4}\right)\left[1 - \left(\frac{\alpha + \frac{b}{2}}{\sqrt{a + \frac{b^2}{4}}}\right)^2\right]$$

Posons

$$\frac{a + \frac{b}{2}}{\sqrt{a + \frac{b^2}{4}}} = z$$

et

$$a + \frac{b^2}{4} = c^2.$$

Alors

$$a - ba - a^2 = c^2 (1 - z^2),$$

d'où

$$a = cz - \frac{b}{2}.$$

Par suite

$$da = c \, . \, dz \, .;$$

et

$$\frac{d\,a}{\sqrt{a - ba - a^2}} = \frac{c\,dz}{\sqrt{c^2 (1 - z^2)}} = \frac{d\,z}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Donc

$$t = \sqrt{\frac{A}{M}} \int \frac{d\,z}{\sqrt{1 - z^2}} + C = \sqrt{\frac{A}{M}} \text{ arc sin } z + C$$

ou, en remplaçant z par sa valeur

$$t = \sqrt{\frac{A}{M}} \text{ arc sin } \frac{a + \frac{b}{2}}{\sqrt{a + \frac{b^2}{4}}} + C = \sqrt{\frac{A}{M}} \text{ arc sin}$$

$$\frac{a + \beta}{\sqrt{\alpha_0^2 + 2\,\beta\,\alpha_0 + \beta^2}} + C = \sqrt{\frac{A}{M}} \text{ arc sin } \frac{a + \beta}{\alpha_0 + \beta} + C.$$

Pour

$$a = 0$$

on a

$$t = 0;$$

donc

$$C = -\sqrt{\frac{A}{M}} \text{ arc sin } \frac{\beta}{\alpha_0 + \beta},$$

d'où

$$t = \sqrt{\frac{A}{M}} \left[\text{arc sin} \left(\frac{a + \beta}{\alpha_0 + \beta} \right) - \text{arc sin} \left(\frac{\beta}{\alpha_0 + \beta} \right) \right].$$

Pour

$$\alpha = \alpha_0$$

on a

$$t = \frac{T}{2};$$

donc

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{A}{M}} \left[\text{arc sin} \left(\frac{\alpha_0 + \beta}{\alpha_0 + \beta} \right) - \text{arc sin} \left(\frac{\beta}{\alpha_0 + \beta} \right) \right].$$

Mais, comme

$$\frac{\alpha_0 + \beta}{\alpha_0 + \beta} = 1, \text{ arc sin } 1 = \frac{\pi}{2}$$

il vient

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{A}{M}} \left[\frac{\pi}{2} - \text{arc sin} \left(\frac{\beta}{\alpha_0 + \beta} \right) \right].$$

687. **Application numérique.** — Pour une montre dont le balancier exécute 18 000 oscillations par heure, nous avons

$$\frac{T}{2} = 0{,}1 \text{ sec.};$$

donc, d'après

$$T = \pi \sqrt{\frac{A}{M}},$$

$$0{,}2 = \pi \sqrt{\frac{A}{M}},$$

d'où

$$\sqrt{\frac{A}{M}} = \frac{0{,}2}{\pi}$$

$$\begin{array}{ll} \log.\ 0{,}2 = \bar{1}.3010300 & \\ \log.\ \pi \ \ = 0.4971499 & - \\ \hline \end{array}$$

$$\log. \sqrt{\frac{A}{M}} = \bar{2}.8038801$$

$$\sqrt{\frac{A}{M}} = 0{,}063662.$$

Admettons que $\alpha_0 = 300^\circ$,

$$\frac{\beta}{\alpha_0 + \beta} = \frac{2{,}4}{302{,}4}$$

$$\left.\begin{array}{r} \log.\ 2.4 = 0{,}3802112 \\ \log.\ 302.4 = 2{,}4805818 \end{array}\right| -$$

$$\log.\ \sin\left(\text{arc}\ \sin\frac{\beta}{\alpha_0+\beta}\right) = \overline{3}.8996294$$

$$\text{arc}\ \sin\frac{\beta}{\alpha_0-\beta} = 0^o\ 27'\ 17'',05 = 0{,}0079365$$ parties de rayon

$$\left.\begin{array}{r} \log.\ \text{arc}\ \sin\frac{\beta}{\alpha_0+\beta} = \overline{3}{,}8996290 \\ \log.\ \sqrt{\frac{A}{M}} = \overline{2}{,}8038801 \\ \log.\ 108000 = 5{,}0334238 \end{array}\right| +$$

$$1{,}7369329$$

Nomb. corr. = 54 sec 567.

Le balancier fait 108000 demi-oscillations pendant que la cage se déplace, et cela produit une avance de $54^s{,}567$ en 24 heures.

Remarquons que l'angle α_0 est l'angle dont tournera le balancier pour une demi-oscillation pendant que la cage se déplace, et $\alpha_0 + \beta$ l'angle dont il tournerait si la cage ne se déplaçait pas.

Par suite de l'impulsion que reçoit le balancier de la part de la roue d'échappement, ces angles subissent une modification. Nous faisons abstraction de cette variation.

La fig. 188 représente le graphique de la marche d'un tourbillon effectuant 18000 oscillations par heure et dont la lame de spiral n'a aucun jeu entre les goupilles de la raquette, ou encore, afin de mieux préciser, dont le spiral à des extrémités à encastrement parfait. En le comparant avec celui de la fig. 183, on leur trouvera une grande ressemblance. De même que la courbe précédemment trouvée nous fait connaître suivant quelle loi varie la marche d'une montre retardée par suite du jeu de la raquette, la courbe de la figure nous donnera le nombre de secondes d'avance du tourbillon. Nous concluons de là qu'un régleur intelligent pourra arriver à produire une

compensation remarquable par l'étude comparée de ces deux courbes, s'il se propose d'annuler le défaut d'avance par un défaut de retard équivalent. Pour y arriver pratiquement, il modifiera le jeu de la lame du spiral entre les goupilles dans la proportion $\frac{l}{L}$ de l'équation que nous venons d'étudier, c'est-à-dire dans le rapport de la longueur de la partie du spiral comprise entre le piton et les goupilles à sa longueur totale.

Une question a été posée depuis quelques années déjà. Un tourbillon doit-il effectuer 18000 ou 21600 oscillations par heure ? La solution de ce problème demanderait l'introduction dans les calculs de toutes les circonstances du fonctionnement de l'échappement, ce qui compliquerait beaucoup les développements de la théorie.

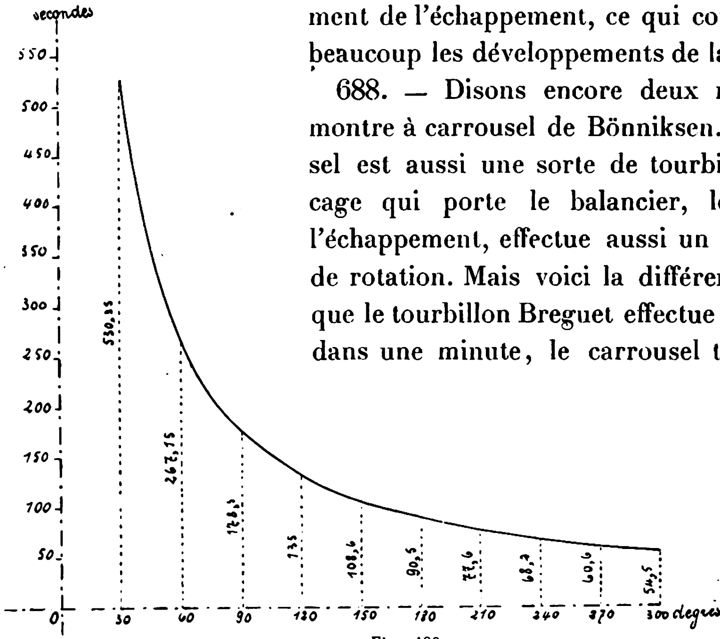


Fig. 188.

688. — Disons encore deux mots de la montre à carrousel de Bönniksen. Ce carrousel est aussi une sorte de tourbillon, car la cage qui porte le balancier, le spiral et l'échappement, effectue aussi un mouvement de rotation. Mais voici la différence : tandis que le tourbillon Breguet effectue la rotation dans une minute, le carrousel tourne plus lentement et emploie environ 56 minutes pour sa rotation complète. Ainsi l'angle dont tournera la cage de la montre à carrousel pour une double oscillation, est 56 fois plus petit que dans le tourbillon Breguet ; il est donc égal à $\frac{2^\circ,4}{56} = 0^\circ,428$. En conséquence l'effet du déplacement sur la marche de la montre sera aussi beaucoup moins considérable. Il pourrait même arriver que cet effet ne comprît pas exactement le retard produit

par l'ensemble des frottements des pivots du balancier et par le fonctionnement de l'échappement à ancre employé par Bönniksen. Si tel était le cas, on corrigerait en communiquant à la cage de la montre un mouvement de rotation plus rapide.

Remarquons encore que l'ajustement de la cage du carrousel produit un grand frottement, qui est toutefois peu appréciable à cause du mouvement lent de la cage. Ce n'est qu'au bout de quelques années de marche que l'effet de ce frottement sera nettement constatable, grâce aux marques laissées sur les pièces par le mouvement. Ainsi les influences les plus variées peuvent agir sur la durée d'oscillation.

689. — Mentionnons-en encore quelques-unes qui sont importantes. Nous avons déjà vu que la théorie de Phillips suppose un encastrement parfait du spiral aux deux extrémités. Or, dans les montres sans raquette ou dans les chronomètres de marine où le spiral subit une certaine pression de la part de l'extrémité de la goupille quand celle-ci dépasse le piton ou la virole au point d'attache (fig. 189), cette condition n'est plus réalisée. Il s'en suit que, lorsque l'amplitude de l'oscillation augmente et que les spires s'agrandissent, la lame du spiral s'appuie de plus en plus contre la partie saillante de la goupille. Comme

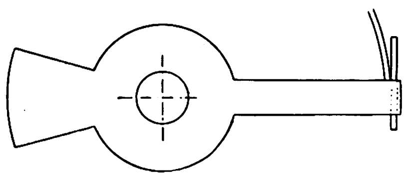


Fig. 189.

cela a pour effet immédiat de raccourcir la partie active du spiral, les grandes oscillations auront une durée moindre que les petites.

Si au contraire, ainsi que le montre la figure 190, la lame du spiral est déjà appuyée contre la goupille dans la position de repos du balancier, il se produira un retard dans les grandes oscillations.

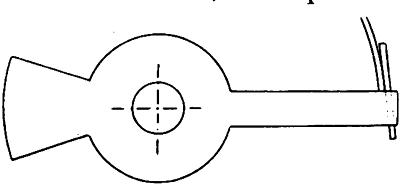


Fig. 190.

Il est donc recommandable, au point de vue de l'isochro

nisme, de couper cette goupille à sa sortie de la virole ou du piton. La longueur active du spiral est alors invariable.

690. — L'intérêt de la particularité suivante n'échappera à personne. Lorsque le balancier accomplit une oscillation quand la raquette est munie de deux goupilles flexibles, la force du spiral fait écarter l'une ou l'autre de ces goupilles dans le sens du mouvement. Il n'en résultera aucune altération du rapport de la durée des grandes oscillations à celles des petites. Mais si, les deux goupilles étant serrées l'une contre l'autre avant la mise en place du spiral, le balancier accomplit son mouvement oscillatoire dans le sens de l'extension du spiral par exemple, la première goupille, supposée flexible, fléchira légèrement et l'autre la suivra en vertu de son élasticité; alors le rapport des oscillations n'est plus constant.

691. — Nous pouvons mentionner un troisième cas : c'est celui où l'on emploie des goupilles dont l'une, intérieure, est forte et fixe, et dont l'autre extérieure est mince et flexible. Dans la grande oscillation, la goupille extérieure seule fléchira et, dans les petites, la lame sera maintenue par cette goupille, la force n'étant pas suffisante pour la fléchir. Dans ce cas encore le rapport des oscillations de grande amplitude à celles de petite amplitude ne sera plus constant.

692. **Influence du frottement des pivots du balancier sur la durée des oscillations.** — A l'aide des principes précédents on peut prouver que le frottement des pivots de balancier ne change pas la durée des oscillations; remarquons toutefois que l'influence du frottement n'est négligeable que lorsqu'il s'agit d'un balancier seul, muni de son spiral et oscillant librement. Il n'en est plus de même, par contre, si l'on considère le balancier dans sa situation normale en relation avec l'échappement. On peut alors déterminer cette influence et l'on trouve qu'il retarde la marche de la montre, ainsi que nous le verrons plus loin. C'est ce frottement des pivots, dans le dernier cas, que nous nous proposons d'étudier maintenant.

La théorie du frottement a été faite dans cet ouvrage (I-336). Les lois générales qu'on en a déduites ne sont applicables en

horlogerie qu'avec beaucoup de prudence, parce qu'on doit tenir compte de l'adhésion due à l'interposition de l'huile, étant donnée la petitesse des organes et la délicatesse des actions mutuelles.

Rappelons sommairement quelques principes fondamentaux de la théorie du frottement.

1) La force de frottement F est proportionnelle à la pression P s'exerçant normalement par l'un des corps sur l'autre.

2) La force de frottement est indépendante de l'étendue des surfaces en contact, s'il ne se produit aucune adhésion entre elles.

3) Le frottement est indépendant de la vitesse de glissement de l'un des corps sur l'autre.

4) Le travail de frottement est égal au produit de la force de frottement F par la longueur du glissement E ou

$$\text{Travail de } F = F.E$$

et comme on a en général

$$F = fp$$

où f est le coefficient de frottement et p la force agissant normalement à la surface de frottement, il vient :

$$\text{Travail de } F = fp.E.$$

Cela rappelé, abordons le problème.

693. — **Détermination de l'influence des frottements des pivots de balancier dans la position verticale de la montre.**

Les pivots des pièces mobiles, dans une montre, ont toujours un certain ébat dans les trous à l'intérieur desquels ils roulent. Cette circonstance est cause qu'ils n'ont pas constamment la même position selon que la montre est placée horizontalement ou verticalement.

Si le balancier a son axe horizontal, le point de contact du pivot et du trou de pierre sera figuré par le point le plus bas du contour du trou ; ce point est donc situé sur la verticale menée par le centre du pivot. Si le balancier est en mouvement, le roulement du pivot sur la surface du trou se produira et le point de contact dont nous venons de parler se

déplacera, jusqu'en d par exemple, déterminé par l'équilibre entre le poids du corps et la force de frottement.

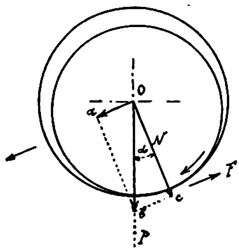


Fig. 191.

Nous allons déterminer la position de ce point d. A cet effet décomposons la force Ob, égale au poids P du balancier, en deux autres forces, dont l'une Oc passant par le point d est par conséquent normale aux surfaces de contact, et dont l'autre Oa est perpendiculaire à la première. En désignant par α l'angle bOc, on aura

$$Oc = p = P \cos \alpha.$$

et

$$Oa = P \sin \alpha.$$

Le frottement au point d sera

$$F = fp = f P \cos \alpha$$

L'angle α sera dès lors déterminé, puisque nous savons qu'il doit y avoir équilibre entre la force de frottement et la force Oa. On aura donc :

$$P \sin \alpha = fP. \cos \alpha.$$

d'où

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \text{tang}\, \alpha = f.$$

D'autre part on sait que le coefficient de frottement est déterminé par la relation

$$f = tg\, \varphi\,;$$

donc il faudra que

$$\alpha = \varphi$$

pour l'équilibre ; ce qui signifie que le point d est déterminé par la condition que l'angle α soit égal à l'angle de frottement. Donc aussi

$$F = P \sin \varphi,$$

car

$$\cos \varphi \text{ tang } \varphi = \cos \varphi \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \sin \varphi.$$

Le moment de cette force sera le même que celui du couple

dont elle fait partie. Le bras de levier de ce couple étant égal au rayon du pivot, on pourra écrire :

$$\text{Moment de } F = P. \sin \varphi . r.$$

Le travail mécanique résultant du frottement s'obtiendra en multipliant le moment précédent par l'angle décrit par un des rayons du pivot depuis la position de repos. Si le balancier décrit un tour, par exemple, cet angle sera égal à 2π et l'on aura pour le travail de F

$$(a) \quad \text{Tr. de } F = 2\pi \times \text{Moment de } F = 2\pi \times P. \sin \varphi . r.$$

Ainsi, lorsque

$$f = 0{,}15,$$
$$\varphi = 8^\circ 32'$$

et

$$\sin \varphi = 0{,}1483 ;$$

donc

$$(b) \quad \text{Trav. de } F = 2 \times 0{,}1483 \, P. \pi . r. = 0{,}2966 \, P. \pi . r.$$

Le poids P du balancier se répartit sur les deux pivots, mais en proportion variable suivant la distance de ces pivots au balancier. Toutefois si le diamètre des deux pivots est le même, la somme des pressions étant égale à P, la somme des frottements doit aussi être la même quelle que soit la distance respective des pivots au balancier. Les équations que nous venons d'écrire, (a) et (b), représentent le travail absorbé par les frottements des deux pivots du balancier. Nous voyons que ce travail est directement proportionnel à l'amplitude de l'oscillation, au rayon des pivots et au poids du balancier.

694. — **Détermination de l'influence des frottements des pivots de balancier dans la position horizontale de la montre.**

Dans ce cas l'axe du balancier est vertical. Admettons d'abord que les surfaces frottantes du pivot et du contrepivot soient parfaitement planes et égales. Alors le pivot tourne constamment autour du même point fixe. Soit (fig. 192) le cercle de centre O, représentant la section terminale du pivot. Partageons cette surface en un nombre n de secteurs égaux suffisamment petits pour que nous puissions considérer l'arc qui les limite, comme une portion de droite. Chacun de ces

triangles subira donc une pression normale égale au poids total du balancier divisé par le nombre de secteurs n, c'est-à-dire $\frac{P}{n}$. La résultante de cette pression aura son point d'application au centre de gravité du triangle, par conséquent en un point situé au tiers de sa hauteur, qui est ici le rayon du pivot, soit aux $^2/_3$ de r comptés à partir du centre O. Dans ces conditions et d'après ce qui précède, la force de frottement due au mouvement de l'un de ces triangles est

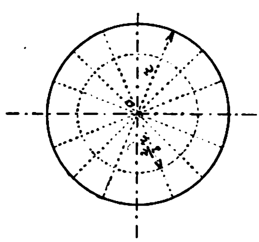


Fig. 192.

$$F = f . \frac{P}{n}$$

et le travail mécanique de cette force, pour un tour du balancier, sera

$$\text{Trav.} F = f \frac{P}{n} \cdot \frac{4}{3} \pi r.$$

Par suite, le travail total dû au frottement sur toute la surface du pivot sera n fois plus grand, soit

$$\text{Trav. total} = f P . \frac{4}{3} \pi r.$$

Ainsi, par exemple si $f = 0,15$, on aura

$$(c) \quad \text{Trav.} F = 0,2 \, Pr . \pi.$$

Si nous comparons entre elles les équations (c) et (b), nous remarquons que, même dans le cas de pivots tout-à fait plats, le travail de frottement est, dans la position horizontale, les deux tiers environ de ce qu'il est dans la position verticale. C'est ce que montrent les formules. Les vérifications pratiques donnent des résultats qui sont différents de ces conclusions théoriques. On ne peut attribuer la divergence qu'à l'effet de l'adhérence produite par la viscosité de l'huile. En tenant compte de ce facteur, ainsi que de la résistance de l'air, les calculs se compliquent considérablement. Nous nous abstiendrons donc de nous étendre sur ce sujet.

695. — Des pivots tout à fait plats à leurs extrémités, dans

le genre de celui que nous avons envisagé pour le calcul précédent, ne sont pas recommandables, pour la raison qu'en introduisant le pivot ainsi construit dans le trou de pierre, on risque trop facilement d'endommager l'arête vive du pivot. En outre, le contre-pivot est rarement une surface plane, il n'est pas toujours placé dans une position rigoureusement perpendiculaire à l'axe du balancier. Si l'on donnait à l'extrémité des pivots la forme de pointes, le frottement dans la position horizontale serait réduit à sa plus simple expression. Néanmoins cette disposition n'est pas recommandable non plus, car alors tout le poids du balancier reposerait sur la pointe fine du pivot. L'arrondi du pivot doit donc être une moyenne entre les deux formes extrêmes que nous venons de considérer. On le choisira à peu près ainsi que le représente la fig. 193. Nous pourrons dès lors adopter, comme rayon de la surface frottante, la moitié du rayon du pivot, c'est-à-dire $\frac{r}{2}$. L'équation (c) deviendra alors

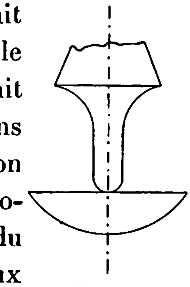


Fig. 193.

$$\text{Trav. de F.} = {}^2/_3 f.\ P.\ \pi.\ r.$$

Nous pourrons donc dire que le frottement des pivots du balancier est, dans la position horizontale, le tiers de ce qu'il est dans la position verticale de la montre.

On sait que le balancier d'une montre chemine moins dans la position verticale que dans la position horizontale; il sera facile de se convaincre pratiquement de la différence de frottement dans ces deux positions en ne plaçant dans le mouvement que le balancier muni de son spiral. On écartera, dans l'un et dans l'autre cas, le balancier du même angle, d'un tour entier par exemple; puis on comptera le nombre d'oscillations respectif jusqu'à l'arrêt du balancier. En faisant cette expérience, on a trouvé 990 oscillations dans la position horizontale et 410 seulement dans la position verticale.

Influence du frottement sur la durée d'oscillation.

696. — Maintenant que nous savons déterminer la force résultant du frottement, nous sommes en mesure de rechercher son influence perturbatrice sur la durée des oscillations.

Cette force, agissant en sens contraire du mouvement, augmentera la durée des demi-oscillations descendantes et diminuera celle des demi-oscillations ascendantes d'une quantité égale. Nous en concluons qu'au total la durée des oscillations n'aura pas changé. Remarquons que, si tel n'était pas le cas, on ne pourrait pas régler une montre du « plat au pendu », puisque le moment de la force du frottement est différent dans ces deux positions. Les raisons que nous venons de donner de cette curieuse compensation, sont d'ordre intuitif. Comme la question a une grande importance, nous allons la traiter rapidement par le calcul.

697. — Représentons le moment de la force du frottement par la lettre μ ; dans la position horizontale nous aurons par conséquent :

$$\mu = f . \mathrm{P} . \frac{r}{3},$$

d'après ce qui précède et, dans la position verticale,

$$\mu = \mathrm{P} . r \sin \varphi.$$

Supposons que le balancier se trouve dans la période de demi-oscillation ascendante et qu'il soit écarté de sa position de repos d'un angle α ; le moment de la force du spiral et celui de la force du frottement agissent tous deux en sens contraire du mouvement et tendront à diminuer l'accélération ; nous les affecterons pour cette raison du signe négatif, les forces motrices étant envisagées comme positives. Nous pourrons donc poser, comme précédemment :

$\mathrm{A} \dfrac{d\omega}{dt} =$ somme des moments moteurs par rapport à l'axe de rotation,

ou

$$A\frac{d\omega}{dt} = -(M\alpha + \mu),$$

d'où

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{M\alpha + \mu}{A}.$$

Et puisque $\omega\, dt = d\alpha$,

$$\omega\, d\omega = -\frac{M\alpha d\alpha + \mu\, d\alpha}{A}.$$

En intégrant, il vient

$$\omega^2 = -\frac{M\alpha^2 + 2\mu\alpha}{A} + C,$$

C étant une constante d'intégration.

La vitesse angulaire s'annule pour une amplitude α_1 de l'oscillation. On aura donc

$$0 = -\frac{M\alpha_1{}^2 + 2\mu\alpha_1}{A} + C,$$

d'où

$$C = \frac{M\alpha_1{}^2 + 2\mu\alpha_1}{A},$$

Donc

$$(a) \qquad \omega^2 = \frac{M(\alpha_1{}^2 - \alpha^2) + 2\mu(\alpha_1 - \alpha)}{A},$$

ou encore, si

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt},$$

$$dt = \sqrt{\frac{A}{M}} \cdot \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_1{}^2 + \frac{2\mu}{M}\alpha_1 - \frac{2\mu\alpha}{M} - \alpha^2}}.$$

Si nous posons, pour abréger :

$$\alpha_1{}^2 + \frac{2\mu\alpha_1}{M} = a$$

et

$$\frac{2\mu}{M} = b,$$

il vient :

$$dt = \sqrt{\frac{A}{M}} \frac{d\alpha}{\sqrt{a - b\alpha - \alpha^2}},$$

forme que nous avons déjà rencontrée. Il vient alors :

$$t = \sqrt{\frac{A}{M}} \frac{d\alpha}{\sqrt{a - b\alpha - \alpha^2}} + C.$$

Nous rencontrerons encore souvent cette intégrale. C'est pourquoi nous avons donné une fois pour toutes, le détail complet des calculs auxquels donne lieu sa recherche.

On a donc

$$t = \sqrt{\frac{A}{M}} \text{ arc sin } \frac{\alpha + \frac{\mu}{M}}{\alpha_1 + \frac{\mu}{M}} + C.$$

Supposons que nous évaluons les temps à partir du moment où α est égal à zéro. Alors

$$\alpha = 0,\ t = 0,$$

et

$$C = -\text{ arc sin } \frac{\frac{\mu}{M}}{\alpha_1 + \frac{\mu}{M}} \sqrt{\frac{A}{M}}.$$

Donc

$$(b) \quad t = \sqrt{\frac{A}{M}} \left(\text{arc sin } \frac{\alpha + \frac{\mu}{M}}{\alpha_1 + \frac{\mu}{M}} - \text{arc sin} \frac{\frac{\mu}{M}}{\alpha_1 + \frac{\mu}{M}} \right).$$

Telle est l'expression de la durée t de l'oscillation.

698. — Si nous voulons avoir la durée t_1 de la demi-oscillation ascendante, nous y ferons $\alpha = \alpha_1$.
Alors, puisque

$$\frac{\alpha_1 + \frac{\mu}{M}}{\alpha_1 + \frac{\mu}{M}} = 1,$$

$$\text{arc sin } 1 = \frac{\pi}{2},$$

donc

$$t_1 = \sqrt{\frac{A}{M}} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\frac{\frac{\mu}{M}}{\alpha_1 + \frac{\mu}{M}} \right) \right].$$

Telle est cette durée. Nous savons que la durée normale serait donnée par

$$t = \sqrt{\frac{A}{M}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Nous en concluons que cette durée est diminuée de la quantité

$$\sqrt{\frac{A}{M}} \arcsin \left(\frac{\frac{\mu}{M}}{\alpha_1 + \frac{\mu}{M}} \right).$$

699. — Nous pourrons procéder d'une façon tout-à-fait analogue pour calculer la durée de la demi-oscillation descendante. Si le balancier est parti d'un point correspondant à un angle — α_0, le frottement agira en sens *contraire* de l'action du spiral ; l'équation de départ du paragraphe 697 devra donc être écrite

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{-M\alpha + \mu}{A}.$$

En développant la solution comme nous l'avons fait dans l'autre cas, on obtiendrait

$$t = \sqrt{\frac{A}{M}} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(\frac{\frac{\mu}{M}}{\alpha_0 - \frac{\mu}{M}} \right) \right].$$

Remarquons que

$$\alpha_0 - \frac{\mu}{M} = \alpha_1 + \frac{\mu}{M}.$$

car le travail mécanique de la force du spiral pendant la demi-oscillation descendante est égal à

$$\frac{M\alpha_0^2}{2}.$$

Pendant une oscillation complète ce travail sera :

$$-\mu(\alpha_0 + \alpha_1),$$

et on pourra écrire :

$$(1) \qquad \frac{M\alpha_0^2}{2} - \frac{M\alpha_1^2}{2} - \mu(\alpha_0 + \alpha_1) = 0,$$

car le travail effectué pendant la demi-oscillation ascendante sera :

$$-\frac{M\alpha_1^2}{2}.$$

On tire de (1)

$$\alpha_0 - \alpha_1 = \frac{2\mu}{M},$$

c'est-à-dire

$$\alpha_0 - \frac{\mu}{M} = \alpha_1 + \frac{\mu}{M}$$

Cette égalité signifie que : la durée de la demi-oscillation descendante est augmentée de la même quantité dont est diminuée celle de la demi-oscillation ascendante. C'est là ce que nous voulions montrer. En conséquence on peut dire que *le frottement pur et simple ne produit aucune variation dans la durée des oscillations du balancier*. Ed. Phillips et Yvon Villarceau sont arrivés au même résultat, mais par des voies différentes.

700. — On peut représenter graphiquement les deux équations (a) et (b). Remplaçons à cet effet, dans l'équation (a), $\frac{2\mu}{M}$ par $(\alpha_0 - \alpha_1)$ tiré des expressions précédentes ; il viendra pour l'équation (a) :

$$\omega = \sqrt{\frac{M}{A}}\sqrt{\alpha_1^2 - \alpha^2 + \frac{2\mu}{M}(\alpha_1 - \alpha)},$$

ou

$$\omega^2 = \sqrt{\frac{M}{A}}(\alpha_0 - \alpha)\sqrt{\frac{M}{A}}(\alpha_1 - \alpha),$$

ce que démontre le développement des calculs.

Prenons alors sur une droite (fig. 194) une longueur

$$HK = \sqrt{\frac{M}{A}}\alpha_0 + \sqrt{\frac{M}{A}}\alpha_1$$

et décrivons du point O, milieu de HK une demi-circonférence. Si nous voulons déterminer la vitesse angulaire ω du balancier pour un angle d'écartement égal à α, nous porterons, à partir du point O, une longueur $Oa = \sqrt{\frac{M}{A}}\alpha$ sur la droite HK.

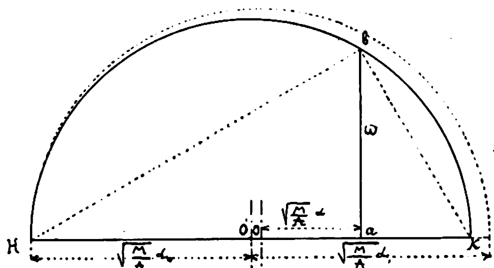


Fig. 194.

La longueur de la perpendiculaire $a\ b$ représentera la vitesse angulaire cherchée. Un principe de géométrie dit en effet que ab est moyenne proportionnelle entre Ha et aK. Or c'est précisément la signification de ω dans notre formule par rapport aux deux quantités

$$\sqrt{\frac{M}{A}}\,(\alpha_0 + \alpha)$$

et

$$\sqrt{\frac{M}{A}}\,(\alpha_1 - \alpha).$$

701. — Quant à l'équation (b), nous pourrons la représenter graphiquement en remplaçant

$$\frac{\mu}{M} \text{ par } \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2}.$$

On obtiendra

$$t = \sqrt{\frac{A}{M}}\left[\text{arc sin}\left(\frac{\alpha + \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2}}{\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}}\right)\right.$$

$$\left. - \text{arc sin}\left(\frac{\frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2}}{\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}}\right)\right].$$

Décrivons donc, avec un rayon égal à $\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}$ et du point O′ comme centre, un arc de cercle sous-tendant un angle de π. (Figure 195.) Déterminons de plus la position d'un point O tel que $HO = \alpha_0$ et $OK = \alpha_1$: nous aurons alors

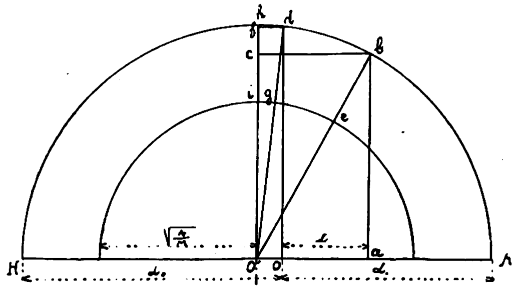


Fig. 195.

$$OO' = \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2}.$$

Si le balancier décrit l'angle α correspondant sur OK à la longueur $O\alpha$, on aura

$$\alpha + \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2} = OO' + O\alpha = bc$$

et

$$O'b = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}.$$

Donc

$$\frac{\alpha + \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2}}{\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}} = \frac{bc}{O'b} = \sin bO'c$$

et

$$\text{arc sin} \frac{\alpha + \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2}}{\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}} = \text{arc } bh.$$

De plus

$$\frac{\frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2}}{\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}} = \frac{O'O}{O'd} = \frac{df}{O'd} = \sin d\,O'f,$$

donc

$$\text{arc sin} \frac{\frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2}}{\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}} = \text{arc } d\,h.$$

Nous aurons par conséquent

$$\text{arc sin} \frac{\alpha + \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2}}{\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}} - \text{arc sin} \frac{\frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2}}{\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}}$$

$$= \text{arc } bh - \text{arc } dh = \text{arc } bd.$$

Si nous multiplions cet arc par $\sqrt{\frac{A}{M}}$, nous obtiendrons, suivant la formule (b), le temps t que le balancier emploie pour décrire l'angle α, c'est-à-dire

$$t = \sqrt{\frac{A}{M}} \times \text{arc sin } bd.$$

Si nous décrivons maintenant, de O′ comme centre, une demi-circonférence de rayon égal à $\sqrt{\frac{A}{M}}$, on a évidemment

$$\text{R}\,\alpha = \text{arc } db$$

et

$$\sqrt{\frac{A}{M}}\,\alpha = \text{arc } eg,$$

R désignant le rayon $\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}$ de l'arc $d\,b$. Par division on obtient

$$\frac{\text{R}}{\sqrt{\frac{A}{M}}} = \frac{\text{arc } db}{\text{arc } eg},$$

donc

$$\sqrt{\frac{A}{M}} \text{ arc } db = \text{R arc } eg = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2} \cdot \text{arc } eg,$$

ce qui donne pour t

$$t = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2} \text{ arc } eg.$$

La demi-oscillation descendante du balancier sera donc

augmentée de l'arc ig et la demi-oscillation descendante diminuée de ce même arc. On peut admettre comme unité pour ce graphique 10 $^m/_m$ pour α_0 et 500 $^m/_m$ pour $\sqrt{\frac{A}{M}}$.

702. — Ainsi le frottement des pivots du balancier ne modifie pas la durée d'une oscillation complète.

Nous appliquerons à un exemple numérique les considérations précédentes. Le balancier a son axe vertical.

Soit $T = 0^s,2$, alors $\sqrt{\frac{A}{M}} = \frac{0,2}{\pi} = 0,063662$

$\mu = fP\frac{r}{3}$, d'après ce que nous avons vu pour ce cas.

$f = 0,15 \qquad P = 1 \text{ gr} \qquad r = 0,05 \, ^m/_m$

$\mu = 0,0025 \qquad M = 1 \qquad \frac{\mu}{M} = 0,0025$

$2\,\alpha_0 = 1\ ^1/_4$ tour $\qquad \alpha_0 = 225^o = 3,92699$

$$\alpha_0 - \frac{\mu}{M} = 3,9245.$$

On aura

$$\log. \frac{\mu}{M} = \bar{3},3979400$$

$$- \log. \left(\alpha_0 - \frac{\mu}{M}\right) = 0,5937843$$

$$\log. \sin \left(\frac{\frac{\mu}{M}}{\alpha_0 - \frac{\mu}{M}}\right) = \bar{4},8041557$$

$$\text{arc sin} \frac{\frac{\mu}{M}}{\alpha_0 - \frac{\mu}{M}} = \text{arc } 0^o 2' 11'',44 = 0,0006375 \text{ parties de}$$

rayon.

$$\log. \text{arc sin} \frac{\frac{\mu}{M}}{\alpha_0 - \frac{\mu}{M}} = \bar{4},8044802$$

$$\log.\sqrt{\frac{A}{M}} = \bar{2},8038803$$

$$\log.\ t = \bar{5},6083605$$

$t = 0,000040584$ seconde par oscillation.

Si nous multiplions t par le nombre d'oscillations effectuées en 24 heures, soit par 432 000, nous trouvons, pour le retard en un jour, 17^s,53. Ce retard est compensé, nous le savons, par une avance égale dans le même temps.

Des différents facteurs pouvant influencer la marche du balancier.

703. — Lorsqu'on soumet un corps à un effort de flexion, comme dans le cas d'une lame de spiral, il se produit une résistance secondaire de la part des molécules formant le corps; l'effet de cette résistance semble se traduire comme une sorte de frottement entre les molécules du corps qui se déforme. Ce « frottement » augmente avec l'épaisseur de la lame et dépend encore de ses autres dimensions. L'expérience a fait admettre que le travail mécanique de cette force résistante est, pour le spiral, proportionnel au carré de l'amplitude des oscillations du balancier. La valeur du coefficient de proportionnalité est toutefois incertaine.

704. L'air offre aussi une résistance au mouvement du balancier. Lorsque cet organe est dépourvu de parties saillantes telles que têtes de vis ou masses additionnelles, la résistance est limitée essentiellement au frottement de l'air sur sa serge. Ces frottements, étant de même nature que ceux des pivots, s'ajoutent à ces derniers. C'est peut-être là la raison pour laquelle Jules Grossmann trouvait entre la théorie et l'expérience une concordance quand il prenait pour valeur du coefficient de frottement 0,15, alors que dans d'autres cas déterminés 0,12 pouvait suffire.

Si le balancier porte des masses additionnelles, comme dans les chronomètres de marine, ou des vis, comme dans le balancier compensateur des montres de poche, ces pièces

saillantes chassent l'air devant elles et il se produit des remous compliqués dans la masse d'air. Le frottement n'est alors plus bien déterminé.

On admet généralement dans ce cas que la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse ; par suite, le travail mécanique absorbé, étant proportionnel au produit de la résistance par le chemin parcouru, sera proportionnel au cube de la vitesse. C'est là un résultat intéressant.

En résumé donc et abstraction faite des particularités qu'elles présentent, ces deux résistances agissent de la même façon que celle du frottement des pivots du balancier. Dans la demi-oscillation descendante, le spiral agit comme force motrice dans le sens même du mouvement, tandis que les forces résistantes agissent en sens contraire; dans la demi-oscillation ascendante, la force du spiral et les forces résistantes agissent en sens contraire. Il en résulte qu'en somme ces forces n'influencent pas la durée des oscillations.

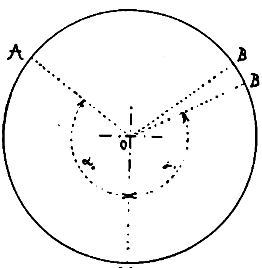


Fig. 196.

704. — Nous ferons maintenant connaître connaître un moyen expérimental permettant de déterminer le travail mécanique de l'ensemble de ces trois forces résistantes.

Soit H (fig. 196) la position de repos d'un balancier muni de son spiral telle qu'elle existe normalement dans la montre.

Si l'on écarte ce balancier de cette position d'un angle HOA $= \alpha_0$ et qu'on l'abandonne à lui-même, la force élastique du spiral lui imprime un moment de rotation dont la vitesse augmente jusqu'au point H. Si ce mouvement pouvait s'établir sans résistances passives, celui-ci n'en serait pas moins retardé à partir du passage au point H, car il faut tenir compte du fait que la réaction élastique agira dès cet instant.

Nous ne pouvons d'ailleurs pas faire abstraction des résistances passives; c'est pourquoi, toutes ces causes aidant, le

balancier n'atteindra pas au-delà de H la position B, symétrique de A. Chaque oscillation sera par conséquent diminuée d'un petit angle représenté par BOB_1 et nous aurons

$$B_1OB = \alpha_0 - \alpha_1,$$

α_1 étant l'angle HOB_1.

Pour que les oscillations conservent leur amplitude initiale, il faut que le balancier reçoive à chacune d'elles une impulsion qui lui fera décrire l'angle $\alpha_0 - \alpha_1$. Le travail Tr nécessaire à ce déplacement sera égal au produit de l'angle $(\alpha_0 - \alpha_1)$ par le moment moyen de la force exercée par le spiral sur le balancier pendant que celui-ci décrit cet angle. Ce moment étant M_1, nous aurons

$$Tr = \frac{M}{2}(\alpha_0 - \alpha_1)^2 = M_1\,(\alpha_0 - \alpha_1),$$

égalité dans laquelle M est le moment par unité d'angle

$$M_1 = \frac{M}{2}(\alpha_0 - \alpha_1).$$

Par suite, si nous parvenons à déterminer la valeur de M et, expérimentalement, celle de l'angle $(\alpha_0 - \alpha_1)$, le travail en question sera connu. L'angle $(\alpha_0 - \alpha_1)$ est très petit et sa mesure directe offre des difficultés; on peut toutefois les tourner en observant la valeur de cet angle pour un grand nombre d'oscillations d'amplitudes voisines de α_0.

705. — On peut considérer la question à un autre point de vue. Appelons φ (K) une certaine fonction φ de la somme K des moments résistants. Le travail mécanique moteur du spiral correspondant à l'angle $AOH = \alpha_0$ (fig. 196) décrit par le balancier sera

$$Tr_1 = \frac{1}{2}\,M\,\alpha_0^2.$$

Le travail de la force résistante du spiral pendant que le balancier décrit l'angle $HOB_1 = \alpha_1$ sera donné par

$$Tr_2 = -\frac{1}{2}\,M\,\alpha_1^2.$$

Quant au travail mécanique des forces passives qui s'éta-

blissent pendant que le balancier parcourt l'angle $\alpha_0 + \alpha_1$, il sera

$$- \varphi (K) (\alpha_0 + \alpha_1).$$

Nous aurons donc au total, puisque la somme des travaux doit être nulle,

$$\frac{1}{2} M \alpha_0^2 - \frac{1}{2} M \alpha_1^2 - \varphi (K) (\alpha_0 + \alpha_1) = 0,$$

d'où, en effectuant les multiplications et en divisant tous les termes par $\frac{M}{2}$,

$$\alpha_0^2 - \alpha_1^2 = \frac{2 \varphi (K)}{M} (\alpha_0 + \alpha_1),$$

ou, puisque

$$\alpha_0^2 - \alpha_1^2 = (\alpha_0 + \alpha_1)(\alpha_0 - \alpha_1),$$

$$(\alpha_0 - \alpha_1)(\alpha_0 + \alpha_1) = \frac{2 \varphi (K)}{M} (\alpha_0 + \alpha_1),$$

et encore

$$\alpha_0 - \alpha_1 = \frac{2 \varphi (K)}{M}.$$

On tire de là

$$\varphi (K) = \frac{M}{2} (\alpha_0 - \alpha_1).$$

C'est ce que, plus haut, nous avons désigné par M_1.

Ainsi donc, en suivant une tout autre voie, nous sommes arrivés à une expression de M_1 absolument identique à celle que nous avions établie en nous basant sur d'autres considérations.

Nous avons vu que, si les forces passives ne modifient pas en principe la durée des oscillations du balancier, elles ont cependant une influence sur la marche de la montre lorsqu'on tient compte du fonctionnement de l'échappement.

Influence de l'échappement sur la durée d'une oscillation du balancier.

706. — Nous avons dit que l'échappement est le mécanisme chargé de restituer au balancier la force vive qu'il a

perdue sous l'action des différentes forces passives. Il est clair que ce système sera d'autant plus parfait que son fonctionnement influencera moins la durée des oscillations.

On a vu également que, lorsqu'un échappement agit avec la même force sous un même angle et pendant le même temps avant et après la position de repos du balancier, son impulsion ne modifie pas la durée des oscillations. Nous avons établi pour le retard ou l'avance due au choc la relation générale, dans laquelle F est la force d'impulsion (393)

$$\Delta T = f\left(F \frac{a}{a_0}\right),$$

la fonction f étant restée indéterminée.

On conçoit que, si ΔT est positif pour un angle a positif compté à partir de la position de repos, et négatif si a est négatif, il puisse devenir nul pour $a = 0$. Nous aurions ainsi une règle importante relative aux fonctions d'un échappement idéal et pouvant se formuler de la manière suivante : Pour que l'influence de l'échappement soit annulée, il faut que son contact avec le balancier se réduise à un choc instantané se produisant au moment exact du passage du balancier par la position de repos ; a_0 est alors nul.

Le même effet se produirait aussi si l'angle a, au lieu d'être nul, avait pour l'impulsion avant le passage à la position de repos une valeur égale et de signe contraire à celle qu'il a après son passage à ce point.

Jusqu'à ce jour, aucun échappement connu ne satisfait à l'une ou à l'autre de ces conditions, c'est-à-dire que pour aucun d'eux cette influence n'est nulle sur la durée de l'oscillation. Il est facile de se rendre compte de la raison de ce fait.

Il suffira de se rappeler que dans une montre le balancier est encore soumis à l'action de forces passives qui ne modifieront pas par elles-mêmes le temps T. Si par contre nous combinons l'effet de ces forces passives avec celui de l'impulsion, nous trouvons que leur résultante a une influence sur la durée des oscillations du balancier. La fig. 197 nous aidera à comprendre d'où provient cette action.

Supposons que le spiral seul agisse : la position de repos du balancier est celle dans laquelle il se trouve lorsque la force du spiral est nulle, c'est-à-dire pour laquelle le spiral est sans déformation. D'autre part, si nous envisageons le balancier dans son mouvement normal, la position de repos sera définie par la condition que la somme des moments de forces qui agissent sur le balancier est égale à zéro. Nous pouvons donc écrire pour cette condition :

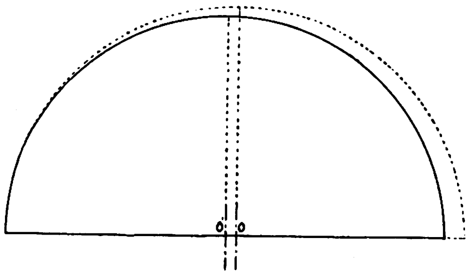


Fig. 197.

$$M\alpha - f(K)\,\alpha = 0$$

ou

$$M - f(K) = 0.$$

C'est ce qui fait que la position d'équilibre, qui était d'abord en O, s'est déplacée et est venue en O'. Si maintenant le balancier reçoit le choc quand il passe par O, il se produit un retard dans la marche, car toutes les forces qui agissent pendant la demi-oscillation descendante et dans le sens même du mouvement produiront de l'avance, et un retard si elles agissent dans le sens du mouvement dans la demi-oscillation ascendante. Ainsi les forces passives résistantes modifient la durée des oscillations quelle que soit la perfection de l'échappement. Le seul moyen de diminuer cette influence consiste à diminuer les résistances. C'est ce que confirme la pratique journalière.

707. — Le cas de l'échappement à cylindre a été envisagé dans l'introduction à la Théorie des échappements (398-I).

Nous n'y reviendrons pas. Nous traiterons plus particulièrement celui de l'échappement à ancre.

En général, la roue d'échappement fait lever l'ancre de 10°. Nous savons que ce parcours peut-être divisé en deux parties correspondant à l'angle de repos de 2° environ et à l'angle d'impulsion de 8°. Si nous admettons que le rapport de la

longueur de la fourchette à la distance du point de contact de la cheville de plateau au centre du balancier soit égal à 4, les angles 10, 8 et 2 seront 4 fois plus étendus pour le balancier. L'angle de levée du balancier sera donc de $4 \times 10 = 40^{\circ}$, comprenant l'angle parcouru pendant le dégagement du repos $2 \times 4 = 8^{\circ}$, et l'angle parcouru pendant l'impulsion de $4 \times 8 = 32^{\circ}$. Nous ne tiendrons pas compte ici de l'angle que l'ancre parcourt pendant que la dent de la roue d'échappement n'est pas en contact avec un des leviers (426-I).

Ainsi, pendant que le balancier décrit l'angle $AOb = a_0 - a_1$ (fig. 198), il est sollicité d'abord par le moment de la force du spiral, qui accélère son mouvement, et ensuite par le moment des forces résistantes. Pendantque le balancier décrit l'angle bOH, les forces résistantes sont cause d'un retard compensé par une avance occasionnée par l'effet de ces mêmes forces pendant le parcours de l'angle HOd. Pendant qu'il décrit l'angle bOc, le balancier doit opérer le dégagement de la dent du plan de repos de l'angle; il s'établit donc ici une force agissant en sens contraire du mouvement et occasionnant un retard. D'autre part, pendant que le balancier décri-l'angle cOH, il reçoit de la part de la fourchette une impulsion qui accélère son mouvement, et, comme cette impulsion s'effectue pendant la demi-oscillation descendante, elle produit une avance. Enfin l'impulsion, continuant pendant le parcours de l'angle HOd, pendant la demi-oscillation ascendante, produit un retard.

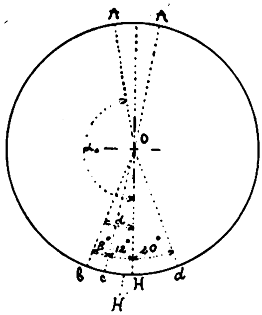


Fig. 198.

Résumons. Pendant que le balancier décrit un angle de 12° avant et après la position du point de repos H, il se produit d'un côté une avance compensée par un retard équivalent de l'autre. Par contre, pendant le temps que le balancier emploie à opérer le dégagement, c'est-à-dire pendant qu'il décrit l'angle bOc de 20 à 12° et qu'il décrit de l'autre côté un angle

symétrique de même ouverture, nous avons un retard. Ce retard augmentera donc quand l'angle de dégagement sera grand, et il croîtra avec la distance de l'origine de cet angle au point H. Il diminue évidemment quand l'amplitude des oscillations augmentera. Il convient ainsi de réduire l'angle de dégagement et l'angle de levée du balancier dans les limites prescrites par le bon fonctionnement de l'échappement

Remarquons que, si l'on augmente la force motrice $f(F)$ du ressort de barillet, l'impulsion que le balancier reçoit de la fourchette est plus forte et l'amplitude α_0 des oscillations augmente. Il est bon de se rappeler que le rapport $\frac{f(F)}{\alpha_0}$ n'augmente pas dans la même proportion que F, car f désigne une fonction quelconque. Si l'on observe la marche d'une montre à ancre bien construite dont on a remonté complètement le ressort moteur, il ne se manifeste, en position horizontale, qu'une différence très faible entre la marche des douze premières heures et celle des douze suivantes, ce qui prouve que le rapport $\frac{f(F)}{\alpha_0}$ demeure à peu près constant. C'est la raison pour laquelle l'emploi de la fusée dans les montres de poche est devenue inutile.

708. — Pour régler la position de repos du spiral de telle façon qu'elle soit en rapport avec le fonctionnement d'un échappement à ancre, on fait tourner la virole sur laquelle est fixée l'extrémité intérieure du spiral de telle façon que le milieu de la cheville de plateau se trouve sur la droite de jonction du centre du balancier au centre de l'ancre. Nous admettons, pour que cela puisse se faire, qu'il s'agit d'un échappement transmettant d'une façon constante le moment de la force de la roue d'échappement au balancier.

Si la position de repos du spiral n'est pas réglée de cette manière, on peut se demander quelle sera la variation diurne qui en résultera.

Ainsi (fig. 198) la position de repos H du spiral est bien en rapport avec le fonctionnement de l'échappement, puisque les

angles HOb et HOd ont chacun 20° d'ouverture. Transportons maintenant, en faisant tourner la virole, le point H en H' de telle sorte que l'on ait $HOH' = 5°$. Il restera alors $HOb = 15°$ et $H'Od = 25°$. De cette façon, pendant la demi-oscillation descendante, la cheville de plateau rencontre l'un des deux côtés de l'entrée de la fourchette à 15° seulement de la position de repos, au lieu de 20°. Le dégagement de la dent du plan de repos de l'ancre s'effectuera sur le parcours de l'angle $-\alpha = 15° - 8°$. On a donc une avance par rapport au cas dans lequel cet angle était de 20° — 8°. Pendant le temps d'impulsion avant la position de repos, c'est-à-dire depuis $-\alpha = 7°$ à 0, il y a moins d'avance que lorsque la position de repos était en H, c'est-à-dire que lorsque α valait 12°. Par contre, pendant la demi-oscillation ascendante, nous avons plus de retard pour un angle décrit de 0° à 25°.

Si maintenant nous imaginons le balancier effectuant l'oscillation inverse, le dégagement se produira sous un angle compris entre $-\alpha = 25°$ à $-\alpha = 17°$ et l'impulsion se donnera avant la position de repos entre — 17° et 0°. Après la position de repos, elle se donnera de 0° à 15°.

Nous concluons de tout cela qu'un faible déplacement de la position de repos du spiral en relation avec l'échappement à ancre ne peut produire qu'une faible variation de la marche diurne de la montre, mais que cette variation n'est pas nulle.

709. — **Cas de l'échappement à détente.** — Nous avons constaté que l'on construit deux genres d'échappement à détente (567-II), l'échappement à ressort et l'échappement à bascule. Les fonctions de ces deux constructions sont identiques. Le point de repos du spiral n'est toutefois pas aussi précisément déterminé dans ce système que dans celui de l'échappement à ancre ou à cylindre. Dans ces derniers, on arrive à satisfaire à une condition particulière, à savoir que, lorsqu'il existe un léger « arrêt au doigt », cet arrêt doit se produire de la même façon des deux côtés de la ligne des centres, donc des deux côtés de la position d'équilibre du spiral. On ne peut

pas éviter, par contre, l'arrêt au doigt dans une montre pourvue d'un échappement à détente.

Il est ainsi possible de construire des montres à cylindre ou à ancre de telle façon que, si l'une de celles-ci est immobilisée par l'arrêtage au bas, elle puisse être mise en mouvement par un très faible remontage du ressort de barillet et sans qu'il soit nécesssaire d'imprimer à la montre un mouvement de rotation. Si elle possède un échappement à détente, cette dernière circonstance n'est plus possible. Comment faut-il, dans ce système, déterminer la position de repos du spiral réglant par rapport à l'échappement de façon que le plus faible ébranlement circulaire de la montre la fasse marcher ? Cette position du spiral est à peu près celle indiquée par la planche 16, lorsque le grand levier se trouve à une petite distance en avant de la dent d'entrée, mais cette position peut légèrement varier suivant la construction de l'échappement.

L'angle formé par le grand et le petit levier est déterminé pour chaque échappement. Il est réglé de telle sorte que la dent d'entrée de la roue atteigne le grand levier avec la plus faible chute permise par la sûreté de fonctionnement de l'échappement. Ainsi, à la position du grand levier représentée sur cette même planche, répond en général une position du petit levier telle que son dos arrondi se trouve très rapproché du ressort d'or. Si l'on imprime à la montre de légers ébranlements circulaires, il arrive d'abord que le petit levier fait dévier le ressort d'or jusqu'à ce qu'il dépasse son extrémité. En admettant que le spiral réglant soit à cet instant suffisamment armé pour pouvoir effectuer le dégagement de la roue d'échappement, celle-ci se mettra en mouvement et atteindra le grand levier en exerçant sur lui une pression dans le sens du mouvement du balancier.

Le spiral agissant en sens contraire du mouvement, après le passage de la position de repos, il peut arriver que son moment — M α soit plus grand que celui qui résulte de la pression de la dent de la roue sur le grand levier et cela

avant que la dent ait pu terminer l'impulsion. Si cet effet se produisait, il faudrait modifier la position de repos du spiral en faisant tourner la virole de façon à éloigner le petit levier du ressort d'or.

D'un autre côté, si le petit levier se trouve trop éloigné du ressort d'or lorsque le balancier est au repos, il faudrait imprimer à la montre un trop grand mouvement de rotation pour amener la pointe du petit levier à dépasser l'extrémité du ressort d'or.

On voit que c'est par tâtonnement que l'on arrive à déterminer la position qui satisfait le mieux aux conditions de bon fonctionnement. Cela dépendra de la construction elle-même et surtout de la longueur des leviers.

Si l'on est parvenu à déterminer la position de repos du spiral en rapport normal avec les fonctions obligées de l'échappement, la montre risquera moins de s'arrêter par l'effet d'une secousse extérieure, comme c'est parfois le cas pour un chronomètre porté par un cavalier.

Remarquons que les planteurs d'échappements à détente ont des principes de construction variables, mais que, malgré quelques divergences, les rapports des divers angles de levée des deux plateaux sont toujours tels, ou doivent toujours être tels, qu'un contre-mouvement imprimé au balancier par une secousse extérieure subie par la montre soit sans effet sur sa marche.

710. — Après avoir ainsi déterminé le réglage de la position de repos du spiral, on peut se demander si cette position est aussi la plus favorable pour assurer de la manière la plus parfaite possible le réglage des marches diurnes de la montre dans les positions horizontales ou verticales qu'elle peut occuper.

Si (pl. 16) on fait tourner le balancier à droite, le petit levier fait dévier le ressort d'or, qui exerce par le fait une réaction sur l'organe régulateur pendant la demi-oscillation ascendante ; résultat : une avance de la durée de l'oscillation. La position du ressort d'or devrait être telle que, malgré la

pénétration relativement grande de son extrémité dans la circonférence décrite par le petit levier, le balancier décrive un angle minimum pendant le temps de ce contact. Admettons toutefois que cet angle soit de 20°. Il va sans dire que le ressort en or doit être extrêmement faible. Comme il agit sur le spiral au moment où celui-ci passe par sa position de repos, son influence sur la durée des oscillations du balancier est très faible.

Lorsque le balancier revient en arrière, la petite levée rencontre le ressort en or et doit mettre brusquement en mouvement tout le système. Il se produit ici un choc et, comme ce dernier a lieu dans la demi-oscillation descendante, il produit un retard. Ce choc sera d'autant plus accentué que le moment d'inertie de la pièce à détente et que la vitesse linéaire de l'extrémité extérieure de la petite levée sont plus grands. Admettons, pour fixer les idées que ce choc ait lieu 9° avant la position de repos du balancier. Après le choc, la pièce à détente se trouve en mouvement et le balancier, étant obligé d'opérer le dégagement de la dent de la pièce de repos, reçoit une impulsion en sens contraire du mouvement, impulsion qui provient du dégagement propre et en outre de la force opposée par le spiral de la bascule ou le ressort d'échappement.

Pendant que le balancier décrit cet angle de 9°, les forces opposées au mouvement produisent un retard. Pendant que le balancier passe par sa position de repos et que la dent de la roue d'échappement abandonne la pièce de repos de l'organe de détente, la roue d'échappement devient libre et commence à effectuer un mouvement de rotation dont l'accélération va en croissant en raison inverse du moment d'inertie de la roue d'échappement et en raison directe du moment de la force que le ressort du barillet transmet à la roue d'échappement. Nous évaluons à 9° l'angle décrit par le balancier à partir du moment où la roue d'échappement devient libre — correspondant à la position de repos du balancier — jusqu'à celui de la rencontre de la dent avec la grande levée. Cette rencontre est très douce, de sorte que nous pouvons faire abs-

traction de la perte résultant de la quantité de mouvement.

711. — Revenons maintenant à l'analyse du mouvement du balancier depuis sa position de repos où s'est opéré le dégagement et où par conséquent la force d'impulsion vient d'être supprimée ; le balancier doit encore vaincre le moment contre-agissant de la force du spiral de la bascule ou du ressort d'échappement. L'angle que le balancier décrit alors jusqu'au point où la petite levée abandonne l'extrémité du ressort en or, peut être évalué à 9° ; comme précédemment et comme ces choses se passent pendant la demi-oscillation ascendante, il y a avance.

Reprenons ensuite le mouvement du balancier à partir du point où il se trouvait lors de la rencontre de la dent avec la grande levée ; à partir de là, la pointe de la dent exerce une pression contre la levée et accélère la vitesse du balancier. Cette force s'exerce donc dans le sens du mouvement, mais pendant la demi-oscillation ascendante : elle produit par conséquent un retard. La fig. 199 donne graphiquement le résumé de la précédente analyse. OH est la position de repos du balancier. Le premier contact entre la petite levée et le ressort en or a lieu sur la ligne OA. Le retard dans la demi-oscillation descendante est figuré par *r*. L'angle AOH = 9°. Lorsque le balancier est arrivé en OC, la petite levée abandonne l'extrémité du ressort. L'angle HOC = 9°. Il se produit une avance. Quand le balancier décrit l'angle COB, il reçoit

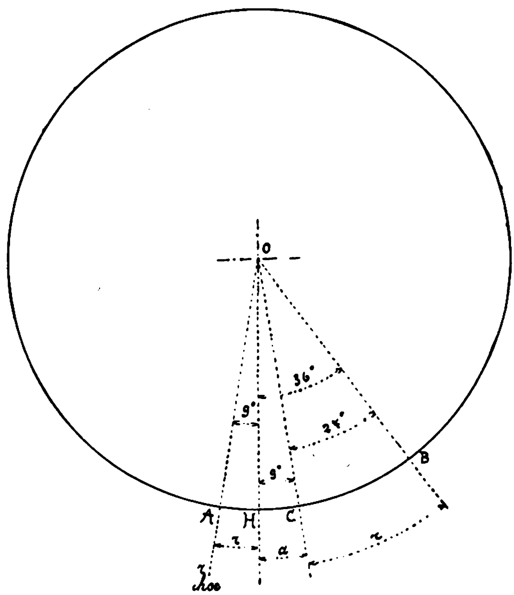


Fig. 199.

l'impulsion de la roue d'échappement et donne un retard. Cet angle est de $36^o - 9^o = 27^o$.

Au total, donc, les angles AOH et HOC sont égaux. Ils sont situés de part et d'autre de la position d'équilibre OH ; à ces deux positions correspondent l'avance et le retard. Il y donc compensation s'il y a symétrie. Mais il y a aussi le retard produit par le choc et celui provenant du parcours qui correspond à l'angle COB. Ces retards ne sont pas compensés.

Nous concluons de là que, si l'on a trouvé la position du réglage du spiral avec précision sans tenir compte des fonctions de l'échappement, nous avons tout de même un retard dans la marche.

712. — Nous arrivons maintenant à ce qui se produit lorsqu'on fait tourner la virole ou point d'attache de l'extrémité intérieure du spiral de manière que la position de repos OH subisse un déplacement quand on tient compte des fonctions de l'échappement. Supposons qu'on fasse tourner la virole jusqu'à amener OH en coïncidence avec OC, c'est-à-dire avec la position qu'occupe le balancier lorsque la pointe de la dent rencontre la grande levée. Lorsque le balancier tourne à droite, il a seulement à faire dévier le ressort d'or, mais l'angle qui correspond à ce déplacement, se trouvera déplacé de 9e de la position de repos OH : l'avance est donc plus considérable. Lorsque le balancier revient en arrière, la petite levée rencontre le ressort d'or sur la ligne OA distante de 18^0 de OH. Il se produit un retard plus considérable que celui que nous avions étudié auparavant.

Pendant que le balancier décrit l'angle AOD (fig. 200), il opère le dégagement. Il y a un retard plus grand que précédemment. Quand il décrit l'angle DOH, la roue d'échappement n'est pas en contact avec la grande levée ; le balancier doit vaincre la seule force provenant de la réaction élastique du ressort de la détente, ce qui occasionne de nouveau un retard. Enfin, pendant que le balancier décrit l'angle HOB de 27^0 dans la demi-oscillation ascendante, il reçoit l'impulsion de la roue d'échappement, ce qui produit encore un retard.

Dans le cas de la fig. 200, toutes ces fonctions de l'échappement produisent un retard; mais il s'agit encore d'examiner si ce retard est aussi grand que celui qui résulte des données admises pour la fig. 199. Le travail mécanique que la roue d'échappement produit, doit être plus considérable que celui des forces résistantes agissant pendant que le balancier décrit l'angle AOH (fig. 200). Cet angle est donc compris entre 0° et 27°, tandis que dans la fig. 199 cet angle d'impulsion était compris entre 9° et 36°. Cette différence est cause d'une plus grande valeur du retard. En résumé, si l'on fait tourner la virole du spiral de façon que dans la position de repos du balancier, la grande levée se trouve plus éloignée de la dent d'entrée dans la direction de la dent de sortie, la pièce avancera.

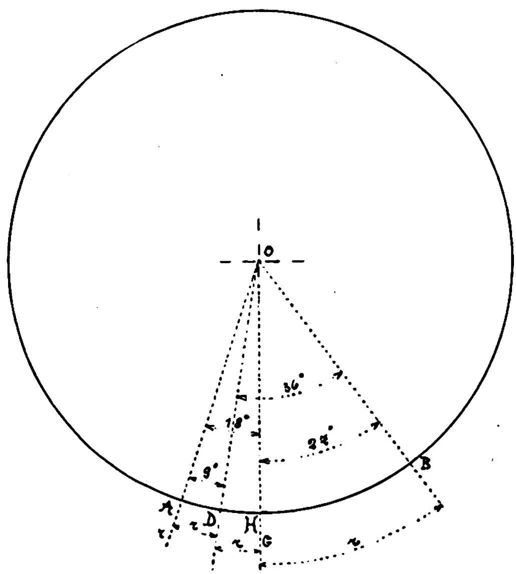


Fig. 200.

713. — On a souvent posé la question suivante : pourquoi une montre ne marche-t-elle pas de la même façon tous les jours ? Si les défauts de mécanisme produisent chaque jour le même effet, la question est digne d'attention, surtout si l'on considère qu'une impulsion plus ou moins forte ne modifie presque pas la durée des oscillations du balancier.

Une première réponse à cette question est que les montres courantes elles-mêmes donnent un réglage relativement satisfaisant, mais que, plus on soigne la qualité du mécanisme, plus aussi on diminue la variation diurne moyenne. Donc, s'il s'agit d'une très petite variation, par exemple d'une seconde ou même d'une fraction de seconde, on peut admettre

que les défauts de fonctionnement dans le rouage ne se produisent pas tous les jours de la même façon. En sorte que l'angle HOC (fig. 199) ou l'angle DOH (fig. 200) peut varier et l'on peut attribuer une grande partie de la variation diurne moyenne à celle de cet angle.

On peut admettre que l'influence de la rencontre de la dent avec le grand levier sur la durée de l'oscillation est la plus petite lorsque cette rencontre s'établit au moment du passage du balancier à sa position de repos OH. Ainsi on peut choisir deux positions de repos du balancier qui, toutes deux, sont également bonnes en principe, mais dont l'une convient mieux pour les montres portatives, exposées à recevoir des chocs, et dont l'autre est plus recommandable au point de vue du réglage et par conséquent aussi pour les chronomètres de marine. Remarquons que l'angle HOC (fig. 199) ou DOH (fig. 200) change avec la position de la montre dans la poche. Supposons à cet angle une certaine valeur α dans la position horizontale pour laquelle les frottements du pivot sur le contre-pivot sent très faibles. Plaçons ensuite la montre dans la position verticale ; les frottements de tout à l'heure sont considérablement accentués ; il en résulte que les oscillations du balancier seront diminuées. La vitesse angulaire du balancier est, en conséquence aussi, moindre dans cette position. D'autre part, la force du ressort du barillet ne variant pas, de même que l'accélération de la roue d'échappement, il s'ensuit que l'angle décrit par le balancier pendant qu'aucun contact n'a lieu entre la dent de la roue et la grande levée, est plus petit dans cette position verticale que dans la position horizontale.

Afin de ne pas compliquer inutilement l'exposé qui vient d'être fait, on a supposé que le moment transmis par la roue au balancier garde une valeur constante pendant toute la durée de l'impulsion. La fig. 201 nous fait voir que tel n'est pourtant pas le cas, car le rapport de la force d'impulsion (balancier) à la force agissante (roue d'échappement) est proportionnel au rapport des rayons primitifs instantanés de ces

mobiles. Ainsi, au premier contact entre la dent de la roue et la grande levée, contact qui pourrait avoir lieu en c', ce rapport est $\frac{Od'}{dO'}$ (fig. 201) ; mais, à cause de l'angle décrit par le balancier pendant que la dent de la roue n'est pas en contact avec la grande levée, il n'est pas nécessaire de s'occuper du contact avant d'être arrivé sur la ligne des centres O O'. Lorsque le contact se produit en c sur la ligne des centres, le rapport des rayons primitifs instantanés est $\frac{Oc}{O'c}$. C'est en ce point que l'impulsion est le plus faible; elle augmente à partir de là jusqu'à la fin de la grande levée, où ce rapport a la valeur $\frac{Od}{dO'} > \frac{Oc}{O'c}$.

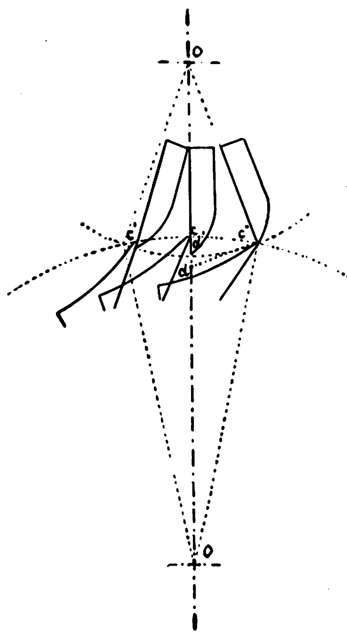


Fig. 201.

Ainsi l'influence d'une force qui ajoute son effet au moment de la force du spiral, est plus grande lorsqu'elle agit à une plus grande distance de la position de repos. D'ailleurs, dans les échappements à détente, cette force d'impulsion augmente depuis la position de repos jusqu'à l'extrémité du levier.

Pour une montre à ancre, c'est le fabricant d'assortiments qui donne le principe de l'échappement et le planteur se conforme à ses indications. Il en est autrement dans le cas des échappements à détente : c'est alors le planteur qui détermine le rapport entre les rayons de la roue et de la grande levée, la grandeur de la petite levée et toutes les combinaisons dont dépendent le bon fonctionnement et aussi en grande partie le bon réglage de la pièce. C'est ensuite l'affaire du régleur de tirer le meilleur parti de la pièce qui lui est confiée.

Si nous sommes entrés dans des détails si minutieux à propos de l'échappement à détente, c'est parce que nous avons surtout en vue les chronomètres de marine, pour lesquels un réglage de haute précision est de la plus haute importance.

714. — On peut résumer en quelques propositions ce qui vient d'être expliqué tout au long.

1) Les frottements des pivots doivent être aussi faibles que possible.

2) L'angle de repos doit être aussi petit que possible.

3) On ne doit pas augmenter la grandeur de l'angle de levée plus que ne le demande la sûreté de l'échappement.

4) L'amplitude des oscillations doit être aussi grande que possible.

La pratique courante confirme rigoureusement l'exactitude de ces règles. Nous avons vu que le retard au pendu provient spécialement du frottement des pivots en relation avec le fonctionnement de l'échappement. Ce retard serait donc supprimé si l'on parvenait à réduire le frottement à zéro. Remarquons, toutefois, qu'il ne faudrait pas conclure de là qu'on doive exécuter les pivots dans les plus petites dimensions possibles, car il convient de ne pas oublier qu'un pivot plié nuit beaucoup plus au réglage d'une montre que s'il était d'un ou deux centièmes de millimètre plus gros. D'autre part, une partie de l'huile est entraînée dans le mouvement des pivots ; il faut songer à donner aux trous des formes pratiquement telles que ce mouvement soit autant que possible éliminé. Les trous courts et olivés sont très recommandables.

715. — Faisons encore observer que le frottement peut varier en même temps que l'état de l'huile ; nous ne pouvons donc pas envisager son effet comme absolument constant. Comme cette résistance agit pendant l'oscillation entière et comme nous savons que l'influence d'une force est d'autant plus considérable qu'elle s'exerce plus près du commencement ou de la fin de l'oscillation, nous voyons que c'est là une des raisons pour lesquelles une montre placée dans des conditions

identiques présente néanmoins d'un jour à l'autre dans sa marche diurne des variations assez sensibles. Si donc une montre munie d'un échappement à ancre, à cylindre, ou d'un échappement semblable, retarde dans la position verticale, on devra d'abord examiner si la sécurité du fonctionnement de l'échappement permet de diminuer l'angle de repos. Dans un échappement à ancre, le minimum de repos par rapport au centre de l'ancre peut être de 1°, de 2° au maximum. Dans une montre à cylindre, 5° de repos peuvent être considérés comme une valeur minimum, tandis que 10° seraient nécessaires à un échappement très imparfait.

En général, il n'est pas nécessaire de mesurer cet angle dans une montre quelconque, car un horloger expérimenté saura toujours l'évaluer à vue d'œil avec une exactitude suffisante.

716. — Enfin un dernier mot.

Nous avons vu que l'on peut diminuer l'influence du repos en augmentant l'amplitude de l'oscillation. Ce résultat ne doit cependant pas être obtenu par l'emploi d'un ressort trop fort, ou d'un balancier trop léger, ou par la diminution du nombre d'oscillations que le balancier exécute en une heure, parce que dans chacun de ces cas on perdrait d'un côté ce que l'on croirait avoir gagné de l'autre. En fin de compte, on ne gagnerait donc rien du tout. On aurait simplement déplacé le défaut. Cette augmentation des amplitudes ne peut être avantageuse qu'autant qu'elle est acquise aux dépens des résistances passives, c'est-à-dire grâce à une exécution très soignée de toutes les parties de la montre, en particulier de l'échappement. Ainsi, pour ce dernier, on aura soin de faire la chute strictement nécessaire ; on diminuera le moment d'inertie de l'ancre et celui de la roue ; on construira le balancier de manière qu'il fende l'air avec facilité. Ajoutons encore que le frottement des pivots devra être réduit à un minimum. Remarquons d'ailleurs que ce dernier sera réduit par la diminution du diamètre des pivots, comme aussi par une répartition convenable du poids total du balancier. Ainsi

un balancier grand et léger peut avoir le même moment d'inertie qu'un autre plus petit mais plus lourd.

Réglage du plat et pendu.

717. — Si l'on observe des différences de marche entre la position horizontale et la position verticale de la montre, on peut en attribuer la cause à deux facteurs, qui sont l'augmentation des frottements des pivots du balancier, et l'effet de l'attraction de la terre sur un balancier ou un spiral non équilibrés, quand la montre se trouve dans la position verticale.

Pour arriver à attribuer avec certitude les inégalités à l'une ou à l'autre de ces causes, qui agissent le plus souvent ensemble, observons la montre d'abord dans la position horizontale, le cadran étant tourné vers le haut, puis vers le bas; la moyenne des marches dans ces deux positions sera la marche moyenne dans la position horizontale.

Pour déterminer la marche moyenne dans la position verticale, il est préférable d'observer les montres dans 4 positions en plaçant successivement en haut les chiffres 12^h, 3^h, 6^h et 9^h. On additionne les 4 marches, puis on prend la moyenne arithmétique: on obtient ainsi la marche moyenne dans la position verticale. On pourra alors comparer entre elles les deux marches moyennes ainsi obtenues. Leur différence est imputable à l'augmentation des frottements sur les pivots du balancier. En comparant ensuite entre elles les quatre marches dans la position verticale, on observera une différence et cette différence sera due à un faux équilibre du balancier ou du spiral.

Il va sans dire que, pour que ces essais prouvent quelque chose, il faut que l'échappement ait été auparavant visité, que tout défaut de construction autre que celui qu'on étudie, soit éliminé, et que le balancier ne touche le spiral en aucun point.

718. — Si l'on veut obtenir un réglage durable, il faut

éviter de compenser un défaut par un autre. Par exemple, il ne faut pas vouloir compenser l'effet dû au frottement des pivots en produisant un faux équilibre soit du balancier, soit du spiral. Ce procédé peut néanmoins, dans certains cas spéciaux que nous examinerons plus tard, rendre service.

Envisageons le cas d'un tourbillon. La cage qui contient l'échappement, le balancier et le spiral, effectuant une révolution entière dans un temps déterminé, il est clair qu'un léger défaut d'équilibre de la cage, du balancier ou du spiral ne pourra pas produire de différence de marche entre les 4 positions verticales.

Lorsque la lame extérieure n'a aucun jeu entre les goupilles de la raquette, la montre avance dans la position verticale par rapport à la marche dans la position horizontale ; car l'augmentation des frottements des pivots du balancier fait diminuer l'amplitude des oscillations et, par suite du déplacement du point où est fixée l'extrémité de la branche extérieure du spiral, il se produit une avance dans la position verticale. Le remède à ce mal est tout indiqué : donner à la lame du spiral du jeu entre les goupilles. On arrive par ce moyen à régler du plat au pendu et à réaliser l'isochronisme des grandes et des petites oscillations.

Il vient naturellement à l'idée de corriger la différence de marche entre les positions horizontale et verticale en aplatissant les extrémités des deux pivots. Ce procédé n'a pas donné tout ce qu'on en espérait et il vaut mieux le rejeter résolument.

Ce qu'il faut réaliser, c'est une diminution des frottements dans la position verticale. On y parvient en employant des pivots de petit diamètre, sans toutefois en compromettre la solidité par une diminution exagérée de leurs dimensions. Ils devront être durs, bien polis et tourner dans des pierres bien conditionnées. Remarquons encore que les frottements des pivots sont proportionnels au poids du balancier.

720. — Comme les frottements des pivots sont plus grands dans la position verticale que dans la position horizontale, l'angle (α_0), dans l'expression que nous connaissons,

$$\triangle T = f\left(F\frac{\alpha}{\alpha_0}\right),$$

est plus petit que dans la position horizontale ; il s'en suit une valeur positive de $\triangle$ T, c'est-à-dire du retard au pendu. Un calcul de longue haleine a prouvé qu'une montre de 43 $^m/_m$ avec échappement à ancre, dont le balancier a une levée de 40° sur la fourchette et dont la dent de la roue sur l'ancre à un repos de 2°, doit retarder de 6^s à 7^s de plus au pendu qu'au plat.

Si l'on augmente la force du ressort du barillet, la force F augmente; α_0 aussi: il pourrait y avoir compensation parfaite si α_0 augmentait proportionnellement à F.

721. — La force centrifuge agissant sur un balancier coupé peut corriger en partie cette différence de marche; ainsi on constate, pour une montre dont le balancier fait 1 tour $^1/_2$, un retard de 5^s,14 et, pour 1 tour $^1/_4$, un retard de 3^s,57, c'est-à-dire une avance de 1^s,57 en 24 heures pour une diminution de 90° dans les amplitudes. C'est là un exemple très courant (786).

L'effet de la force centrifuge peut donc, dans certains cas, être utile, ainsi qu'on le remarque pour les montres de poche. Le meilleur moyen de favoriser l'action de cette force serait évidemment d'augmenter la flexibilité de la lame de la serge tout en satisfaisant aux exigences de la compensation. Nous verrons que la déformation maximum de la serge par l'effet des différences de température se produit lorsque

$$\frac{e''}{e'} = \sqrt{\frac{E'}{E''}},$$

e'' et e' étant les épaisseurs des deux métaux dont la lame est composée. Si cette relation n'est pas satisfaite, il faudra y remédier, soit en modifiant l'épaisseur totale de la serge, soit en déplaçant dans une direction convenable les masses compensatrices. Il ne faut pas oublier que ces mêmes moyens pourront servir à modifier l'effet de la force centrifuge.

722. — En 1878, la fabrique américaine Waltham avait présenté à l'Exposition de Paris des balanciers dont la serge

était pourvue sur sa face externe d'entailles triangulaires (fig. 202) où l'on avait coulé du laiton. Cette disposition assurait une répartition à peu près équivalente du laiton et de l'acier. En vue de la compensation, on avait fait la serge mince. D'ailleurs cette particularité augmentait l'effet de la force centrifuge, ce qui avait pour résultat de faire avancer les montres au pendu. Cette construction fut rapidement abandonnée.



Fig. 202.

723. — On pourra tirer un meilleur parti de la force centrifuge en rendant la lame de la serge plus flexible et en perçant des trous de vis dans la partie de la serge qui se trouve proche des bras. Le réglage du plat au pendu ainsi produit se maintiendra-t-il si l'amplitude des oscillations diminue, soit par rendement du ressort du barillet, soit par un épaississement des huiles dans les trous des pivots du rouage et du balancier ? C'est ce que l'expérience permet de savoir. Ainsi une montre a un balancier décrivant au plat des arcs correspondant à 1 tour $^1/_2$, et au pendu des arcs de 1 tour $^1/_4$, elle présente au plat un retard de $5^s,14$ et de $3^s,57$ au pendu; il y a donc au pendu une avance de $5^s,14 - 3^s,57 = 1^s,57$.

Si, maintenant, les arcs sont de 1 tour $^1/_4$ au plat et de 1 tour au pendu, l'avance au pendu ne sera plus que de $3^s,57 - 2^s,25 = 1^s,32$.

La différence $1^s,57 - 1^s,32 = 0^s,25$ nous fait comprendre que la force centrifuge ne peut en aucun cas compenser exactement le retard produit par une augmentation des frottements des pivots de balancier, mais que, par contre, cette différence de $^1/_4$ de seconde est d'un ordre de grandeur tel qu'on peut raisonnablement essayer de compenser partiellement l'effet des frottements par l'utilisation de la force centrifuge.

De ce qui précède, il résulte une fois de plus qu'une montre dont le balancier effectue de grandes oscillations, se réglera plus facilement qu'une autre dans laquelle les amplitudes sont plus petites.

724. — Nous venons de voir ce qui concerne l'effet des frottements. Nous allons maintenant examiner celui d'un défaut d'équilibre du balancier ou du spiral.

725. — La théorie enseigne ce qui suit.

Le centre de gravité du balancier et celui du spiral dans leur position de repos doivent être situés sur l'axe du balancier ; ils doivent également y demeurer quand le balancier en mouvement déforme le spiral.

Il ne faut pas se dissimuler qu'il est très difficile d'y arriver. Qu'advient-il quand ces conditions ne sont pas réalisées? Nous étudierons successivement les deux cas possibles.

Effet du fonctionnement d'un balancier non équilibré sur la durée des oscillations dans la position verticale de la montre.

726. — L'instrument dont on se sert pour vérifier l'équilibre d'un balancier est connu sous le nom *d'outil à mettre d'équilibre* ; il est formé de deux règles d'acier trempé ou de pierres dures, parfaitement droites, horizontales et parallèles. On fait reposer le balancier par ses pivots sur l'arête de ces règles. Cet outil doit être d'une sensibilité extrême et, par conséquent, exécuté avec le plus grand soin ; les règles seront parfaitement polies et maintenues dans la propreté la plus rigoureuse afin que le roulement des pivots ne se transforme jamais en un glissement. Une vis de rappel permet de rapprocher ou d'éloigner aisément les deux règles l'une de l'autre en les maintenant toujours rigoureusement parallèles. Le pied de l'instrument est muni de vis calantes permettant d'assurer l'horizontalité de l'ensemble. La section des règles doit être celle qu'indique la fig. 203; c'est la plus avantageuse, car elle ne détériore pas les pivots.

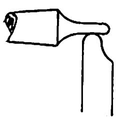


Fig. 203.

Quand un balancier a été placé sur l'outil de manière que la partie cylindrique des pivots repose seule sur les règles, on fixe de nouveau l'instrument; puis on donne au balancier une légère impulsion, au moyen d'un pinceau, pour vérifier sa stabilité dans toutes les positions. On révèle les défauts cachés de la pièce en donnant à l'ensemble de l'appui de petites secousses. On arrive de cette ma-

nière à mettre en évidence les défauts de rondeur des pivots.

Remarquons encore qu'un balancier compensateur peut facilement s'échauffer d'un côté au contact de la main et causer momentanément un défaut d'équilibre. Il est bon, pour cette raison, d'attendre un instant avant d'entreprendre l'examen approfondi de la pièce.

727. — Un balancier n'oscille jamais seul ; il est toujours accompagné d'une virole à laquelle est attaché le spiral ; comme cette virole est fendue, elle n'est jamais parfaitement équilibrée sur l'axe. Il peut donc arriver que le balancier, quoique parfaitement équilibré, constitue avec la virole un ensemble déséquilibré. Ce défaut ne peut être révélé que par les variations de marche de la montre; c'est pour cette raison qu'il est nécessaire d'examiner l'effet, sur le réglage, de l'excentricité du centre de gravité du système.

728. — Admettons que, dans la position de repos du balancier, son centre de gravité se trouve placé sur la ligne verticale passant par l'axe et au-dessous de cet axe (fig. 204).

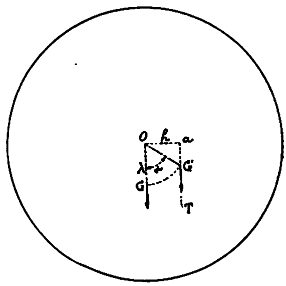


Fig. 204.

L'écartement $OG = \lambda$ a été amplifié sur la figure pour le rendre plus facilement visible.

Ecartons le balancier de sa position de repos d'un angle $GOG' = \alpha$; au moment de la force du spiral $M\alpha$ viendra s'ajouter le moment d'une autre force due au déplacement du centre de gravité. Le poids P du balancier agit suivant la verticale G'T. Le bras de levier de son moment est $Oa = \lambda \sin \alpha$, et le moment lui-même sera — $P \lambda \sin \alpha$.

Il est nul pour $\alpha = 0$, car $\sin 0° = 0$; il augmente avec α jusqu'à la valeur $\alpha = 90°$; puis il diminue quand α varie de 90° à 180° où il devient de nouveau nul, puis repasse par les mêmes valeurs absolues (abstraction faite des signes) de $\alpha = 180°$ à $\alpha = 360°$. Dans une montre, α ne dépasse guère 270°.

L'accélération du mouvement est liée aux moments par l'équation connue

$$\omega\, d\, \omega = -\frac{M}{A}\, \alpha\, d\, \alpha - \frac{P\, \lambda}{A} \sin \alpha\, d\, \alpha,$$

d'où, en intégrant,

$$\frac{\omega^2}{2} = -\frac{M}{2\,A}\, \alpha^2 + \frac{P\, \lambda}{A} \cos \alpha + C,$$

ou, en multipliant par 2,

$$\omega^2 = -\frac{M}{A}\, \alpha^2 + \frac{2\,P\,\lambda}{A} \cos \alpha + C.$$

La vitesse ω est nulle pour $\alpha = \alpha_0$, c'est-à-dire qu'on a :

$$0 = -\frac{M}{A}\, \alpha_0^2 + \frac{2\,P\,\lambda}{A} \cos \alpha_0 + C,$$

d'où

$$C = \frac{M}{A}\, \alpha_0^2 - \frac{2\,P\,\lambda}{A} \cos \alpha_0.$$

Donc

$$\omega^2 = \frac{M}{A}\left(\alpha_0{}^2 - \alpha^2\right) + \frac{2\,P\,\lambda}{A}\left(\cos \alpha - \cos \alpha_0\right)$$

et on pourra poser

$$dt = \sqrt{\frac{A}{M}}\, \frac{d\,\alpha}{\sqrt{\left(\alpha_0^2 - \alpha^2\right) + \frac{2\,P\,\lambda}{M}\left(\cos \alpha - \cos a_0\right)}},$$

d'où, en intégrant,

$$T = \pi \sqrt{\frac{A}{M}}\left[1 - \frac{P\,\lambda}{M}\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha_0{}^2}{2^3 .\, 2 .\, 1^2} + \frac{\alpha_0{}^4}{2^5 .\, 3\,(1.2)^2} - \frac{\alpha_0{}^6}{2^7 .\, 4 .\, (1.2.3)^2} + \frac{\alpha_0^8}{2^9 .\, 5 (1.2.3.4)^2} - \cdots\right)\right]$$

Cette intégrale a été résolue pour la première fois par Ed. Phillips [1].

729. — On peut calculer d'après cette équation, pour un balancier donné, les valeurs de T correspondant à diverses valeurs de α_0, en faisant varier cette dernière quantité de 30 en 30 degrés. Les résultats de ces calculs sont représentés sur le graphique de la fig. 205, dans lequel on a porté

[1] Nous donnerons comme annexe une méthode de résolution de cette intégrale, que nous devons à l'obligeance de M. Henri Krebs, privat-docent à l'Université de Neuchâtel.

les demi-arcs d'oscillations α_0 en abscisses et le nombre de secondes correspondant en ordonnées. Prenons pour base de nos calculs le balancier d'une montre de 45 $^m/_m$, du poids de 1 gr., et supposons que, pour produire l'excentricité du centre de gravité, on ait enlevé de la tête d'une vis située, au repos du balancier, sur la ligne verticale passant par l'axe et au-dessus de ce dernier, 0,0005 gr. de métal, à une distance de 10 $^m/_m$ de l'axe. Afin de ne pas modifier le poids total, on ajoutera 0,0005 gr. de métal à la vis diamétralement opposée. Soit $M = 2$ gr. le moment de la force du spiral.

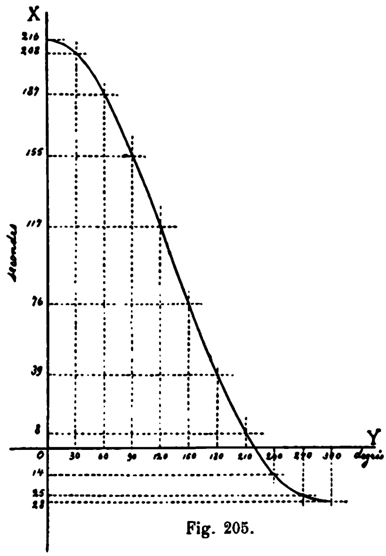


Fig. 205.

Dans ces conditons, les ordonnées positives représenteront une avance et les négatives un retard de la marche diurne. On voit que, lorsque le demi-arc d'oscillation comprend 220°, (l'oscillation totale 440°, c'est-à-dire un peu moins que 1 tour $^1/_4$), l'excentricité du centre de gravité du balancier ne produit aucune variation, ce qui est absolument conforme aux données de l'expérience. Si l'arc d'oscillation est plus grand que 220°, il se produit un retard et, s'il est plus petit, une avance. Nous pouvons conclure de là que l'amplitude des arcs d'oscillation la plus favorable dans la position verticale sera de 1 tour $^1/_4$. Comme cette amplitude augmente, dans la position horizontale, de 80° à 90°, l'arc d'oscillation sera, « au plat », d'environ 1 tour $^1/_2$. Cette valeur peut être considérée comme une bonne moyenne. En effet, si la montre est complètement remontée, si l'huile est fraîche et si le ressort-moteur n'a pas encore pris sa forme stable, il est clair que l'amplitude deviendra plus grande.

L'équation précédente nous montre que T dépend encore du moment M de la force du spiral ; plus il est petit, plus T

sera grand. C'est pour cette raison que les montres à cylindre présentent de si grandes variations du plat au pendu, par suite d'une excentricité du centre de gravité du balancier; les oscillations en sont très petites et le moment de la force du spiral très faible. Si, dans une montre de cette nature, on a réglé l'échappement de manière à donner le plus petit repos possible, si l'on a, de plus, supprimé le jeu pouvant exister pour la lame extérieure du spiral entre les goupilles de la raquette, si le spiral est bien centré et bien ajusté, si tout enfin dans la montre est établi dans des conditions normales et que cependant la montre retarde quand même au pendu, il n'existe pas d'autre moyen de correction que l'allègement du balancier dans sa partie supérieure.

730. — Mais, avec une montre à ancre ou un chronomètre à détente exécutés dans toutes les conditions désirables de précision en vue d'un réglage correct, il en est tout autrement. Si ces montres ne sont pas trop petites, elles devront être réglées du plat au pendu sans qu'il soit nécessaire de déséquilibrer le balancier. Si elles n'étaient pas réglées dans ces deux positions, il sera toujours possible de rechercher la cause de l'irrégularité et de la corriger. Les défauts habituels, courants, ont été énumérés dans ce qui précède. Nous n'y reviendrons pas.

Si une montre ne marche pas également dans les quatre positions verticales avec une amplitude d'oscillation de 440°, le défaut ne se trouve certainement pas dans l'équilibre du balancier. D'une manière générale, pour savoir exactement si une perturbation est ou non imputable à un défaut de cette nature, il suffira d'observer la marche de la montre dans chacune des positions entre lesquelles elle présente de l'avance ou du retard, et avec deux amplitudes d'oscillation différentes. Supposons, par exemple, qu'une montre présente les différences de marches suivantes :

	Grandes oscillations	Petites oscillations
pendant haut	10 sec. retard	5 sec. retard
pendant bas	5 sec. retard	10 sec. retard

On pourra affirmer que, dans la position « pendant haut », le centre de gravité du balancier se trouve en dessous de l'axe du balancier. Au moyen de ces observations, on atteindra les dernières limites de l'exactitude.

Il en serait autrement si les observations avaient donné les résultats suivants :

	Grandes oscillations	Petites oscillations
pendant haut	10 sec. retard	10 sec. retard
pendant bas	5 sec, retard	5 sec. retard

Dans ce cas, le défaut est indépendant de l'équilibre et l'on aurait tort de vouloir faire une correction par addition de poids.

731. — Ed. Phillips a effectué les calculs ci-dessus en se plaçant à un autre point de vue encore. Il a supposé que le centre de gravité du balancier fait avec la verticale passant par l'axe un angle quelconque β. Il a obtenu, pour ce cas nouveau, l'expression :

$$T = \sqrt{\frac{A}{M}} \left[1 - \frac{P\lambda}{M} \cos\beta \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha_0^2}{2^3 .\ 2.\ 1^2} + \cdots\cdots\right)\right].$$

Si $\beta = 90°$, T ne subit aucune variation en tant que le balancier oscille seul. Mais, lorsque le balancier est mis en relation avec un échappement, il pourra y avoir des variations dans les valeurs de T ; ainsi, l'échappement à détente peut présenter des variations de durée des oscillations, même sans aucun changement dans la position du centre de gravité du balancier.

Il est presque superflu d'ajouter que la virole à bras employée pour les spiraux cylindriques (fig. 189) doit être parfaitement équilibrée et qu'il est nécessaire, avant de fixer le spiral, de la placer sur une tige et d'éprouver sur l'outil à mettre d'équilibre la situation exacte de son centre de gravité.

732. — Nous avons déjà dit quelques mots de l'influence que peut produire une virole ordinaire fendue. Même si la fente n'est pas large, l'influence du défaut d'équilibre se

manifeste assez apparemment dans les montres à ancre. Examinons ce cas avec quelques détails.

La matière enlevée avec une lime à fendre les vis a approximativement un poids de 0,001 gr.; le centre de gravité de la matière enlevée peut être placé à 0,8 $^{m}/_{m}$ de l'axe. En conséquence et avec ces données, la variation sera de $\frac{10}{0,8} = 12,5$ fois plus petite que dans l'exemple précédent. Si l'amplitude est de 1 tour, on aura : $\frac{39}{12,5} = 3,12$ secondes, c'est-à-dire une différence d'environ 6 secondes entre les marches dans deux positions diamétralement opposées.

Examinons maintenant le défaut inhérent au spiral.

Influence du déplacement du centre de gravité du spiral sur la durée des oscillations.

733. **Centre de gravité du spiral.** — Il arrive très souvent qu'une montre ayant son balancier parfaitement d'équilibre présente néanmoins des différences de marche dans les différentes positions verticales. Une des causes pouvant produire cet effet réside assez souvent dans le mauvais ajustement d'un spiral, dont le centre de gravité n'est pas situé sur l'axe dans la position de repos ou qui s'en éloigne pendant le mouvement du balancier.

L'influence du mouvement de ce centre de gravité ne peut pas être analysée aussi simplement que celle due au déplacement du centre de gravité du balancier. Comme ces deux mouvements sont indépendants l'un de l'autre, il n'est pas possible de compenser un de ces défauts par l'autre.

Lorsqu'un spiral cylindrique est pourvu de courbes terminales satisfaisant rigoureusement aux conditions de Phillips et que le centre du spiral coïncide avec le centre de l'axe du balancier, le centre de gravité du système demeurera sur l'axe. De plus il y demeurera pendant le mouvement comme

au repos ; ce fait important assure le développement concentrique du spiral.

Si ces conditions sont remplies et s'il n'existe aucun autre défaut dans le mécanisme, la montre marchera également bien dans les quatre positions verticales.

Le principe que nous venons d'énoncer, peut se justifier aisément.

734. — Un spiral cylindrique se compose de deux courbes A'C' et A''C'', d'un arc C'C'', et d'un plus ou moins grand nombre de spires circulaires, dont le centre est projeté en O (fig. 206)[1]; en conséquence, leur centre de gravité se trouvera en O également. Il suffira dès lors, pour justifier le précédent principe, de montrer que le moment des 2 courbes A'C' et A''C'' est égal à celui de l'arc de cercle C'C'', de quelque longueur qu'il soit. Les deux courbes A'C' et A''C'' étant théoriques, le centre de gravité de l'une devra se trouver en un point S', tel que, selon Phillips, OS' soit perpendiculaire à OC', et que

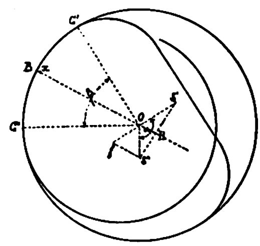


Fig. 206.

$$OS' = \frac{\rho^2}{l'},$$

ρ étant le rayon du spiral et l' la longueur de la courbe ; S'' sera le centre de gravité de l'autre courbe, à une distance de O exprimée par

$$OS'' = \frac{\rho^2}{l''},$$

l'' étant la longueur de la courbe A''C''.

Le centre de gravité du système des deux courbes se trouvera au point H sur la droite S'S'' et tel que

$$\frac{S'H}{S''H} = \frac{l''}{l'} = \frac{OS'}{OS''}.$$

La géométrie enseigne que, dans ces conditions, la ligne

[1] Les points A' et A'' ont été omis sur la figure ; ils sont faciles à placer.

OH partage l'angle S'OS'' en deux parties égales, et, comme OS' et OS'' sont respectivement perpendiculaires à OC' et OC'', il en résultera que le prolongement OB de OH partagera l'angle C'OC'' en deux parties égales.

Posons

$$\sphericalangle \mathrm{C'OC''} = \beta.$$

Le moment des deux courbes sera

$$(l'' + l')\ \mathrm{OH},$$

si le centre des moments est l'origine O.

Pour trouver la valeur de OH, prolongeons la droite S'O jusqu'au point f et menons la ligne S''f parallèle à OH, on aura

$$\mathrm{O}f = \mathrm{OS'}$$

et, si $\sphericalangle \mathrm{S'OS''} = \alpha$, il vient

$$\sphericalangle \mathrm{O}f\mathrm{S''} = \sphericalangle \mathrm{OS''}f = \sphericalangle \mathrm{HOS''} = \frac{\alpha}{2}.$$

Donc

$$\mathrm{S''}f = 2\ \mathrm{OS''} \cos\frac{\alpha}{2}$$

et

$$\mathrm{OH} = \frac{\mathrm{S''}f \times \mathrm{OS'}}{\mathrm{S'}f} = \frac{2 \times \mathrm{OS''} \times \mathrm{OS'} \cos\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{OS'} + \mathrm{OS''}},$$

ou, en remplaçant OS' et OS'' par leurs valeurs, on aura

$$\mathrm{OH} = \frac{2\frac{\varrho^2}{l''}\cdot\frac{\varrho^2}{l'}\cos\frac{\alpha}{2}}{\frac{\varrho^2}{l'}+\frac{\varrho^2}{l''}} = \frac{2\varrho^2\cos\frac{\alpha}{2}}{l'+l''}.$$

Le moment des deux courbes sera donc

$$\mathrm{OH}\ (l'+l'') = 2\,\varrho^2 \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Le centre de gravité de l'arc C'C'' se trouve en x sur la droite OB, bissectrice de l'angle β, c'est-à-dire sur le prolongement de OH.

La distance Ox du centre de gravité d'un arc de cercle au centre est exprimée par la relation

$$\mathrm{O}x = \frac{\text{corde C' C''} \times \text{rayon } \varrho}{\text{longueur de l'arc C'C''}}.$$

Le moment de l'arc sera donc

$$2\,\varrho^2 \sin\frac{\beta}{2}$$

et, comme les angles $\frac{\beta}{2}$ et $\frac{\alpha}{2}$ ont pour somme $\frac{\pi}{2}$, on a

$$\sin\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\alpha}{2},$$

et le moment de l'arc devient

$$2\,\varrho^2 \cos\frac{\alpha}{2}.$$

On voit que ce moment est bien égal à celui des deux courbes A′C′ et A″C″.

Le centre de gravité du système se trouve donc bien en O, sur l'axe du balancier.

735. — Il résulte du calcul précédent qu'il n'est nullement nécessaire que la forme des courbes soit la même ; il suffit qu'elles satisfassent, chacune pour son compte, aux conditions établies par Phillips ; en outre, les deux rayons OC′ et OC″, aboutissant aux points où les courbes terminales se détachent des spires, peuvent former entre eux un angle quelconque.

736. — Remarquons encore qu'une courbe intérieure non théorique, attachée à la virole, a, sur le réglage, une influence perturbatrice plus grande qu'une courbe extérieure non théorique attachée au piton. Cela s'explique aisément. Le poids de la partie extérieure du spiral, étant en partie supporté par le piton qui est fixe, a une influence beaucoup moins considérable que le poids de la partie intérieure, laquelle repose sur le balancier et participe à son mouvement.

On conçoit qu'un spiral cylindrique muni de courbes terminales non théoriques aura au réglage une influence beaucoup plus considérable sur la durée des oscillations dans les positions verticales qu'un spiral plat ou qu'un spiral sphérique, puisque dans ces derniers cas la forme des spires concourt déjà par elle-même à un développement concentrique et qu'en outre les spires intérieures sont plus rapprochées du centre du balancier que dans le spiral cylindrique.

Centre de gravité d'une spirale d'Archimède. Spiral plat.

737. — En raison de sa force simple, le spiral cylindrique se prête tout naturellement à l'étude de la force réglante. Pratiquement cette forme particulière du spiral est très avantageuse, puisque tout horloger peut, sans outillage spécial, construire, tremper et polir cet organe élégant. Toutefois il ne peut être placé que dans des montres suffisamment hautes ou dans des chronomètres de marine ; dans les montres de poche actuelles, il ne serait pas adapté à son but à cause du manque de place : c'est pour cette raison que dans ce dernier cas on n'emploie que la forme en spirale d'Archimède.

738. — Déterminons analytiquement la position du centre de gravité d'une spirale d'Archimède.

A cet effet reportons-nous à la (fig. 169) et conservons-en les notations.

Nous admettrons que le centre de gravité cherché n'est pas au centre de la courbe, c'est-à-dire à son origine. Pour qu'il s'y trouve, nous devons munir le spiral d'une courbe terminale intérieure dont le moment soit égal à celui de la spirale proprement dite, mais de signe contraire, ce moment étant pris par rapport au même axe.

Cherchons tout d'abord le moment de la spirale.

On sait que le moment d'une courbe quelconque de longueur L est

$$M_x = \int y dL \qquad \text{par rapport à l'axe des } x$$

et

$$M_y = \int x dL \qquad \text{par rapport à l'axe des } y.$$

Nous allons exprimer x, y et dL au moyen d'autres grandeurs. Soit r le rayon vecteur au point M, faisant avec le rayon vecteur en M' l'angle infiniment petit $d\theta$. Du point O

comme centre, décrivons l'arc de cercle MN de longueur $r.d\theta$. On aura donc

$$\mathrm{NM}' = dr.$$

L'angle MNM′ est droit quand il est infiniment petit.

En conséquence

$$d\mathrm{L} = \sqrt{r^2\,d\theta^2 + dr^2}.$$

L'équation de la courbe étant

$$r = a\,\theta,$$

on a, en différenciant,

$$dr = a\,d\theta,$$

donc

$$d\mathrm{L} = \sqrt{a^2\,\theta^2\,d\theta^2 + a^2\,d\theta^2} = a d\theta\sqrt{1+\theta^2} = a d\theta\sqrt{\frac{1}{\theta^2} + 1}.\theta.$$

De plus nous avons, d'après la figure,

$$y = r\sin\theta = a\,\theta\sin\theta$$
$$x = r\cos\theta = a\,\theta\cos\theta.$$

Donc

$$\mathrm{M}_x = \int_{\theta''}^{\theta'} y d\mathrm{L} = a^2\int_{\theta''}^{\theta'}\theta^2\sin\theta\sqrt{1+\frac{1}{\theta^2}}.\,d\theta$$

$$\mathrm{M}_y = \int_{\theta''}^{\theta'} x d\mathrm{L} = a^2\int_{\theta''}^{\theta'}\theta^2\cos\theta\sqrt{1+\frac{1}{\theta^2}}.\,d\theta.$$

Mais nous avons

$$\sqrt{1+\frac{1}{\theta^2}} = \left(1+\frac{1}{\theta^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{1.2}\cdot\left(\frac{1}{\theta^2}\right)^2 + \cdots$$

Nous pouvons négliger les termes qui suivent le 2ᵉ à cause de leur extrême petitesse, alors les moments devienent

$$\mathrm{M}_x = a^2\int_{\theta''}^{\theta'}\theta^2\sin\theta d\theta + \frac{1}{2}a^2\int_{\theta''}^{\theta'}\sin\theta\,d\theta.$$

En intégrant par parties d'après l'expression générale

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

il vient pour la première intégrale

$$\int_{\theta''}^{\theta'}\theta^2\sin\theta d\theta = -\theta^2\cos\theta\Big|_{\theta''}^{\theta'} + \int_{\theta''}^{\theta'} 2\cos\theta.\,\theta.\,d\theta =$$

$$-\theta^2\cos\theta + 2\,\theta\sin\theta\Big|_{\theta''}^{\theta'} - 2\int_{\theta''}^{\theta'}\sin\theta d\theta = \theta^2\cos\theta + 2\,\theta\sin\theta + 2\cos\theta\Big|_{\theta''}^{\theta'}.$$

D'autre part la deuxième intégrale donne

$$\frac{1}{2} a^2 \int_{\theta''}^{\theta'} \sin\theta d\theta = -\frac{a^2}{2} \cos\theta \Big|_{\theta''}^{\theta'} .$$

Donc

$$(a) \quad M_x = a^2 \left\{ -\theta^2 \cos\theta + 2\,\theta \sin\theta + \frac{3\cos\theta}{2} \right\} \Big|_{\theta''}^{\theta'} .$$

On trouverait de la même manière, puisque

$$\int \theta^2 \cos\theta\, d\theta = \theta^2 \sin\theta + 2\,\theta \cos\theta - 2\sin\theta$$

et

$$\int \cos\theta d\theta = \sin\theta,$$

$$(b) \qquad M_y = a^2 \left\{ \theta^2 \sin\theta + 2\,\theta \cos\theta - \frac{3\sin\theta}{2} \right\} \Big|_{\theta''}^{\theta'} .$$

Nous supposons désormais $\theta'' = 0$, x et y représentant les coordonnées du centre de gravité du spiral. On aura

$$\int_0^L y dL = y L, \text{ d'où } y = \frac{\int_0^L y dL}{L} = \frac{M_x}{L},$$

$$\int_0^L x dL = x L, \text{ d'où } x = \frac{\int_0^L x dL}{L} = \frac{M_y}{L} .$$

Nous avons trouvé précédemment, pour la longueur L de de la spirale d'Archimède,

$$L = \frac{r}{2} \left[\sqrt{\theta^2 + 1} + \frac{\text{Log. nép. } (\theta + \sqrt{\theta^2 + 1})}{\theta} \right] .$$

Nous pouvons simplifier les expressions M_x et M_y en faisant tourner le système d'axes coordonnés d'un angle θ. Soient X' et Y' les coordonnées, dans le nouveau système, d'un point M dont les coordonnées étaient X et Y dans l'ancien. D'après la figure 207, on voit que

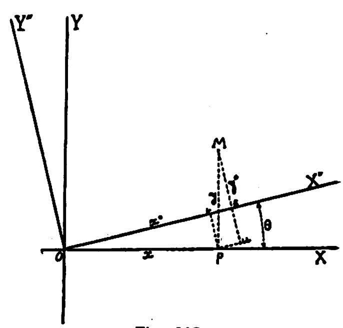


Fig. 207.

$$Y' = Ms = Mu - ip$$
$$X' = Os = Oi + pu,$$

ou

$$(c) \quad \begin{cases} Y' = -x \sin\theta + y \cos\theta \\ X' = x \cos\theta + y \sin\theta. \end{cases}$$

On a pour M_x, en introduisant les valeurs des limites 0 et θ',

$$M_x = a^2\left(-\theta'^2 \cos\theta' + 2\theta' \sin\theta' + \frac{3\cos\theta'}{2}\right)$$

et, pour M_y,

$$M_y = a^2\left(\theta'^2 \sin\theta' + 2\theta' \cos\theta' - \frac{3\sin\theta'}{2}\right).$$

Dès lors, si $r' = a\theta'$, il viendra

$$y = \frac{-r'^2 \cos\theta' + 2ar' \sin\theta' + \frac{3a^2\cos\theta'}{2}}{L}$$

$$x = \frac{r'^2 \sin\theta' + 2ar' \cos\theta' - \frac{3a^2}{2}\sin\theta'}{L}.$$

Remplaçant, dans (c), x et y par ces dernières valeurs il vient

$$Ly' = -r'^2 \sin^2\theta' - 2ar' \sin\theta' \cos\theta' + \frac{3a^2}{2}\sin^2\theta'$$

$$-r'^2\cos^2\theta' + 2ar' \sin\theta' \cos\theta' + \frac{3a^2}{2}\cos^2\theta',$$

ou, en simplifiant,

$$Ly' = -r'^2 + \frac{3a^2}{2} = M_x.$$

On trouverait de même

$$Lx' = 2r'a = M_{y'}.$$

Tels sont les moments de la spirale par rapport aux nouveaux axes OX′ et OY′. Le moment de la courbe que nous devons construire pour ramener le centre de gravité sur l'axe du balancier, devra donc être

$$(d) \quad \begin{cases} ly'_1 = r'^2 - \frac{3a^2}{2} = -M_{x'} \\ lx'_1 = -2r'a = -M_{y'} \end{cases},$$

où l désigne la longueur de la courbe, x'_1 et y'_1 les coordonnées de son centre de gravité.

On peut remarquer que les conditions auxquelles satisfait cette courbe terminale sont différentes de celles que Phillips avait formulées et qui sont

$$ly'_1 = r'^2,$$
$$lx'_1 = 0.$$

Pour qu'il y ait correspondance, il faudra que nous fassions dans les équations (d)

$$a = 0.$$

Disons de suite que a est une quantité très petite, de sorte que pratiquement les équations (d) se réduisent quand même à la forme des équations de Phillips. Ces dernières ayant été établies pour le cas des spiraux cylindriques, on peut dire que la construction des courbes terminales est la même pour l'un ou l'autre genre de spiraux.

Théorie de la courbe intérieure.

739. — Le spiral plat d'une montre est fixé par sa partie intérieure à la virole du balancier ; l'origine de la courbe spirale ne coïncide pas avec le centre, puisque, pour pouvoir fixer la virole, on est obligé de couper quelques tours intérieurs. Comme la partie enlevée n'a pas son centre de gravité sur l'axe du balancier, la partie restante n'y aura pas non plus le sien. Pour l'y amener, il faudra donc construire une courbe intérieure dont le moment soit égal, mais de signes contraires, à celui de la partie enlevée du spiral.

740. — Représentons graphiquement la courbe intérieure. L'axe des x' passera par le point du spiral où la courbe intérieure à son origine. Si l est la longueur de la courbe, x', et y', les coordonnées de son centre de gravité, on aura

$$ly'_1 = r'^2 - \frac{3\,a^2}{2}$$
$$lx'_1 = -\,2\,ar'.$$

Un procédé analogue à celui que nous avons employé pour la construction de la courbe terminale de Phillips nous

permettra de déterminer de proche en proche la figure de la courbe intérieure du spiral plat (planche 19).

741. — Un spiral plat composé d'une courbe extérieure, d'un certain nombre de spires et d'une courbe intérieure calculée selon les principes établis, aura son centre de gravité au centre du sytème. Ce point ne se déplacera pas pendant le mouvement et le spiral, se développant et s'enroulant toujours d'une façon concentrique et uniforme, n'exercera plus aucune pression ni tension sur l'axe du balancier.

Les oscillations du spiral sont ainsi devenues isochrones.

Nous pouvons facilement montrer que le centre de gravité du système est effectivement à l'origine des coordonnées. Il suffira de montrer que

$$\Sigma \int y\,d\mathrm{L} = 0,$$

$$\int y\,d\mathrm{L}$$

étant successivement calculé pour la spirale, la courbe terminale et la courbe intérieure ; or on a

$$\begin{aligned}
\Sigma \int y\,d\mathrm{L} = {} & a^2\left(-\theta'^2 \cos\theta' + 2\,\theta' \sin\theta' + \frac{3\cos\theta'}{2}\right) \\
& - a^2\left(-\theta_1'^2 \cos\theta'_1 + 2\,\theta'_1 \sin\theta'_1 + \frac{3\cos\theta'}{2}\right) \\
& + a^2\left(\theta'^2 \cos\theta' - 2\,\theta' \sin\theta' - \frac{3\cos\theta'}{2}\right) \\
& + a^2\left(-\theta_1'^2 \cos\theta'_1 + 2\theta'_1 \sin\theta'_1 + \frac{3\cos\theta'_1}{2}\right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma \int x\,d\mathrm{L} = {} & a^2\left(\theta'^2 \sin^2\theta' + 2\,\theta' \cos\theta' - \frac{3\sin\theta'}{2}\right) \\
& - a^2\left(\theta_1'^2 \sin^2\theta'_1 + 2\,\theta'_1 \cos\theta'_1 - \frac{3\sin\theta'_1}{2}\right) \\
& - a^2\left(\theta'^2 \sin^2\theta' + 2\,\theta' \cos\theta' - \frac{3\sin\theta'}{2}\right) \\
& + a^2\left(\theta_1'^2 \sin^2\theta'_1 + 2\,\theta'_1 \cos\theta'_1 - \frac{3\sin\theta'}{2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

La (planche 20) représente un spiral muni d'une courbe

extérieure et d'une courbe intérieure, et qui, s'il est soigneusement exécuté, permettra un réglage d'une précision insurpassable pour un chronomètre dans les 4 positions verticales.

N'oublions pas, toutefois, que le spiral isochrone, tel que nous l'avons réalisé, n'implique absolument pas l'isochronisme de la marche de la montre. Nous nous sommes suffisamment étendus sur la cause de ce fait pour n'y pas revenir. Le seul point que nous traiterons encore, est celui qui concerne l'influence, sur le réglage, de l'excentricité du centre de gravité du spiral.

Déplacement du centre de gravité du spiral.

742. — Reprenons, pour simplifier, le cas d'un *spiral cylindrique* et supposons-le d'abord dépourvu de courbes terminales; l'extrémité inférieure des spires sera donc directement attachée à la virole, et l'extrémité supérieure au piton. Plaçons la montre dans une position verticale. La spire supérieure étant fixée au piton, on pourra supposer que tout son poids est supporté par cette pièce ; le déplacement du centre de gravité pendant le mouvement aura donc sur la durée de l'oscillation une influence restreinte, que nous négligerons pour le moment. Quant à l'effet dû à la spire inférieure, il est très appréciable.

Admettons que l'amplitude de l'oscillation corresponde à une rotation de 1 $^1/_2$ tour du balancier, et suivons le déplacement du centre de gravité d'une spire pendant ce mouvement; nous verrons plus loin le développement mathématique de notre théorie. Nous commencerons par l'examiner au point de vue descriptif.

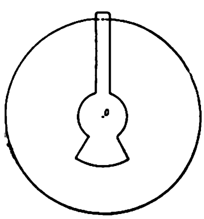


Fig. 208.

Nous imaginerons d'abord qu'au repos du spiral le point d'attache à la virole se trouve en haut (fig. 208). Pendant la période de contraction, le centre de gravité occupera successivement les points *a*, *b*, *c* (fig. 211), en s'éloignant de plus en

plus du centre du balancier. On peut voir que de 0 en *a* l'action est à peu près nulle, puisque le sens moyen du déplacement est horizontal et qu'en outre, pour cette partie de l'oscillation, le spiral se trouve près de sa position de repos.

De *a* en *b* (fig. 210) le centre de gravité descend et la force

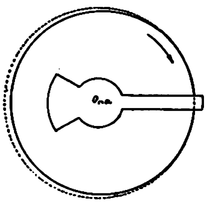


Fig. 209.

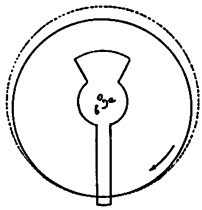


Fig. 210.

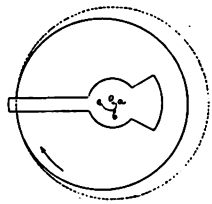


Fig. 211.

qui lui est appliquée, agit dans le sens du mouvement du balancier ; comme c'est pendant la période ascendante, cette action produira un retard. De *b* en *c* (fig. 211) le centre de gravité remonte et la force qui lui est appliquée, agit en sens inverse du mouvement, ce qui produira une avance. Nous avons donc

de *a* en *b* un retard,
de *b* en *c* une avance.

Ces deux effets ne peuvent pas se compenser, car l'action exercée de *b* en *c*, étant due à une force qui agit sur un bras de levier plus long, donnera une avance plus forte que le retard produit au début.

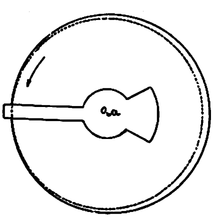


Fig. 212.

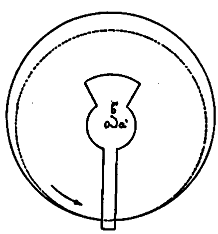


Fig. 213.

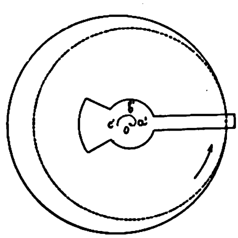


Fig. 214.

743. — En reprenant le balancier dans sa position de repos et en suivant de nouveau sa marche pendant la période ascendante de l'expansion du spiral, on verra que le dépla-

cement de son centre de gravité aura un effet contraire au mouvement de c' en b' et de même sens de b' en c'. On aura ainsi

de a' en b' une avance,
de b' en c' un retard.

Le résultat est donc le même que celui que nous avions trouvé pour la période descendante. Pour une oscillation complète, les effets de ce retard et d'avance se compenseraient exactement si les déplacements du centre de gravité étaient les mêmes dans les périodes d'expansion et de contraction du spiral. Nous savons que tel n'est pas le cas, parce que l'expansion du spiral est plus forte que la contraction. Nous aurons donc, dans l'exemple traité ci-dessus, un léger *retard* (fig. 215).

744. — Si, au lieu d'être en haut, le point d'attache de la virole était en bas, le chemin décrit par le centre de gravité sera celui qu'indique la fig. 216 et nous constaterons une légère *avance*.

745. — Lorsque le point d'attache est à droite de l'axe, la

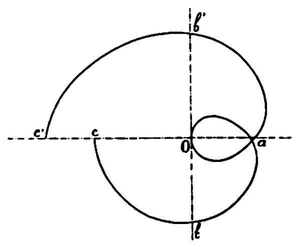


Fig. 215.

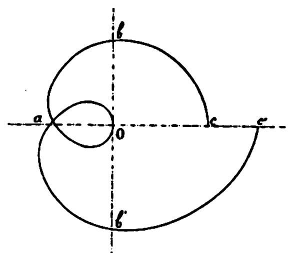


Fig. 216.

trajectoire du centre de gravité sera celle de la fig. 217. Pendant la contraction du spiral et pendant la période ascendante, le centre de gravité descend d'abord de O en d en produisant un *retard* ; puis il remonte de d en c en produisant une *avance*. Au retour il descend de c en d en produisant une *avance* et monte ensuite de d en O en produisant un *retard*. Les mêmes choses se produisent pendant l'expansion du spiral : donc, quel que soit le sens du mouvement, le centre

de gravité produit pour cette position du point d'attache un *retard* de O en d et de O en d', et une *avance* de d en c et de d' en c'. On voit immédiatement que le déplacement de O en c est beaucoup plus grand que celui de O en d, et, comme le bras de levier de la force est aussi plus long dans le premier trajet, l'influence sur la durée des oscillations sera aussi plus considérable. La montre aura donc une forte *avance*.

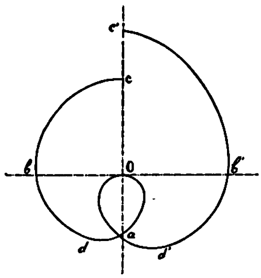


Fig. 217.

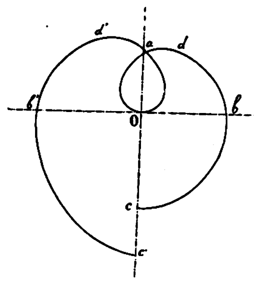


Fig. 218.

On peut vérifier que l'avance diminue avec l'amplitude, s'annule pour une amplitude totale d'environ 300 degrés, puis se change en retard pour des amplitudes moindres.

746. — Nous n'avons examiné, dans ce qui précède, que l'influence d'un déplacement du centre de gravité de la première spire, celle dont le poids repose sur le balancier ; cependant toutes les spires participent au mouvement à des degrés divers, mais constamment tels que la dernière spire n'exerce plus aucune influence sur la durée des oscillations.

Il résulte de tout cela qu'un spiral cylindrique attaché à la virole par l'extrémité de la première spire donnera de mauvais résultats de marche dans les diverses positions verticales.

748. — Pour un *spiral plat*, la conclusion est la même, quoique l'effet soit moins accentué. La spire intérieure, de très petit diamètre, s'attache à une virole qui a, au point d'attache, un diamètre également très petit, de sorte que le déplacement du centre de gravité, bien que s'effectuant de la même manière que dans le cas du spiral cylindrique, est rela-

tivement beaucoup plus faible; les variations de marche sont par conséquent aussi moins considérables. Cependant elles peuvent parfaitement atteindre 5 ou 6 secondes dans une position verticale ou dans l'autre, ce qui donne entre des positions extrêmes un écart de marche d'environ 10 à 12 secondes.

749. — Dans la pratique et selon le Règlement de la majorité des Observatoires, on n'a à se préoccuper que de 3 positions verticales (la position « pendant en bas » ne comptant pas), de sorte que l'on peut remédier à l'écart que nous signalons en plaçant le point d'attache de la virole de la manière la plus favorable. Si donc on place le point d'attache à droite, en regardant la montre du côté du cadran (fig. 217), il en résultera une force avance au pendu, et la variation sera réduite au minimum pour les deux positions « pendant à droite » et « pendant à gauche ».

L'avance pour le « pendant en haut », atteignant 3 à 6 secondes selon les amplitudes, se trouvera en partie compensée par le retard « au pendu » que produit toujours l'échappement à ancre. On peut donc recommander aux régleurs cette dernière position du point d'attache comme étant la plus favorable au réglage dans les positions verticales.

Lorsqu'on regarde une montre du côté du mouvement, ce point se trouve par conséquent à gauche de la virole quand la montre est pendue et quand le spiral fait vis à droite autour de l'axe à partir de la virole. Si le spiral fait vis à gauche, il est évident que le point d'attache doit être placé à droite de l'axe.

750. — Il n'est pas hors de propos de signaler ici une méthode pratique pour placer facilement le point d'attache dans la position voulue.

Sur une feuille de papier on trace 2 droites perpendiculaires l'une à l'autre, A B et CD, et l'on place le mouvement de manière à faire coïncider le centre de l'axe avec l'origine des coordonnées (fig. 219); la ligne XY passera par le centre

de la montre et par le milieu du pendant. On marque alors un point de repère P vis-à-vis du piton ; puis, après avoir enlevé la platine, on joint O à P par une droite. On place ensuite le spiral choisi, fixé à la virole, sur le papier, de telle façon que le centre de la virole coïncide avec le point O et que le point d'attache soit en M (fig. 220). On marque le

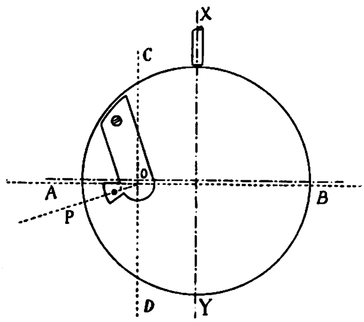


Fig. 219.

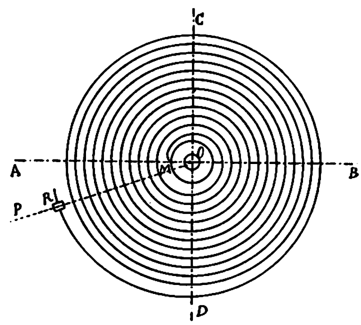


Fig. 220.

point R sur OP. Le point R sera le point d'encastrement du spiral dans le piton et, dans ces conditions, le point d'attache à la virole se trouvera placé où on le voulait. Rappelons encore que, pour un spiral s'enroulant à gauche, le point d'attache devra se trouver à droite du point O sur la ligne OD.

Extension des considérations précédentes. Influence des courbes non-théoriques sur la durée des oscillations.

751. — Nous avons vu qu'un spiral doit être complété à chacune de ses extrémités par des courbes terminales théoriques et que, faute de ce soin, la durée des oscillations subirait des altérations.

Nous nous proposons de rechercher le sens de ces altérations et commencerons par le cas le plus simple en supposant un *spiral cylindrique* dont l'une des extrémités, l'intérieure,

par exemple, est munie d'une courbe théorique, tandis que l'autre en est dépourvue.

La fig. 221 représente le système au repos et la fig. 222 pendant la déformation, après que le balancier a tourné d'un angle de 60°, par exemple.

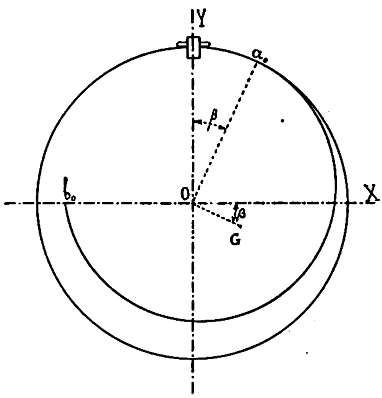


Fig. 221.

Nous savons que, pour calculer le nouveau rayon ρ du spiral, nous pouvons nous servir de la formule précédemment établie (664)

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 \pm \frac{\alpha}{L} \rho_0}.$$

Nous admettrons que le spiral est formé de la courbe $b_0\, a_0$ de rayon r_0, décrite d'un seul arc de cercle, et encastré au point b_0 dans la virole (671), de l'arc de cercle $a_0 y$ et de n tours circulaires de rayon ρ_0. Supposons le piton placé sur Oy et le point d'attache de la courbe au spiral sur l'axe Ox.

Soient : L la longueur totale du spiral, l la longueur de la courbe terminale, $\rho_0 = 40^m/_m$ et $n = 5$. Nous aurons

$$\begin{array}{rr} l = 40 \times 0{,}82679 \times \text{arc } 242^\circ\, 25'\, 36'' = & 139{,}93 \\ \text{arc } a_0\, y = 40 \times \text{arc } 15^\circ\, 57'\, 10'' = & 11{,}12 \\ \text{spiral} = 40 \times 2\,\pi \times 5 = & \underline{1256{,}64} \\ \text{Longueur totale L} = & 1407{,}69 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \log.\ \alpha = \ \ 0{,}0200286 \\ \log.\ \rho_0 = \ \ \underline{1{,}6020600} \end{array}\right\} +$$

$$\left.\begin{array}{l} \log.\ \alpha\rho_0 = \ \ 1{,}6220886 \\ \log.\ L = \ \ \underline{3{,}1485070} \end{array}\right\} -$$

$$\log.\ \frac{\alpha\rho_0}{L} = \bar{2}{,}4758316$$

$$\frac{\alpha\rho_0}{L} = 0{,}029565$$

$$\left.\begin{array}{rl} \log.\ \rho_0 = & 1{,}6020600 \\ \log.\left(1+\frac{\alpha}{L}\rho_0\right) = & \underline{0{,}0126544} \end{array}\right\} -$$

$$\log.\ \rho = 1{,}5894056$$

$$\rho = 38{,}8513.$$

Le spiral étant composé, avant la déformation, de 5 tours, auxquels il faut ajouter 15° 57′ 10″, soit au total 6537430 secondes, cet angle sera donné après la déformation par la relation

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{6537430}{x},$$

d'où

$$x = \frac{6537430\,\varrho_0}{\varrho} = 6730820 \text{ secondes} = 5 \text{ tours } 69^\circ\,38'\,40''.$$

Le rayon $r_0 = 33{,}0716$ devient

$$r = \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{L} \cdot r_0}.$$

Nous aurons donc, en introduisant les valeurs des lettres,

$$r = 32{,}2775.$$

La fig. 222 représente le spiral déformé suivant la loi (664)

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} = \frac{\alpha}{L}.$$

Le centre du spiral devrait conséquemment se déplacer de O en O′, si le balancier n'y faisait obstacle. Par suite de cette résistance, chaque molécule du spiral subit un effort et réagit à son tour dans une direction OO′. La variation due à une molécule peut être représentée par

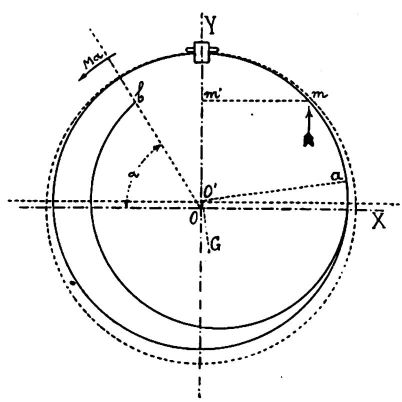


Fig. 222.

$$K.\ \overline{OO'},$$

selon le théorème disant que la *force nécessaire pour fléchir*

un ressort droit est proportionnelle à la flèche de la ligne de courbure finale du ressort. Cette force, agissant sur un bras de levier $m\,n = x$, exercera un moment

$$M = K\,\overline{OO'} \times x_1.$$

La force du moment de la résultante de tous les moments partiels doit passer par le centre de gravité du spiral d'abscisse $x_{1\,d}$, $x_{1\,d}$ désignant l'abscisse du centre de gravité du spiral déformé; or

$$OO' = \varrho_0 - \varrho = \varrho_0 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{L}\varrho_0}\right) = \pm \frac{\varrho_0^2}{L} \cdot \frac{\alpha}{1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0}$$

$$K\,\overline{OO'}\,x_{1\,d} = \pm\, K.\,\frac{\varrho_0^2}{L} \cdot \frac{\alpha}{1 \pm \frac{\alpha}{L}\varrho_0} \cdot x_{1\,d}.$$

Il s'agit de déterminer maintenant la position du centre de gravité du spiral.

Centre de gravité du spiral dans la position d'équilibre.

752. — Le centre de gravité de la courbe $b_0 a_0$ (fig. 221) doit se trouver sur la perpendiculaire élevée en O sur la droite a_0O ; sa distance au centre devra être

$$OG = \frac{\varrho_0^2}{l}.$$

Les coordonnées du centre de gravité de l'arc $a_0 y$ sont:

$$x'' = \frac{\varrho_0^2\,(1 - \cos\beta)}{\varrho_0\,\beta}$$

$$y'' = \frac{\varrho_0 \sin\beta}{\varrho_0\,\beta}.$$

Ajoutons le moment lx' à $\rho_0\,\beta\,x''$ et le moment $l y'$ à $\rho_0\,\beta\,y''$; nous obtenons ainsi les expressions :

$$lx' + \rho_0\,\beta\,x'' = \rho_0^2 + \rho_0^2\,(1 - \cos\beta) = \rho_0^2 \quad (M_1)$$
$$ly' + \rho_0\,\beta\,y'' = -\,\rho_0^2 \sin\beta + \rho_0^2 \sin\beta = 0 \quad (M_2,)$$

qui sont les sommes des moments par rapport à OY et par rapport à OX.

Dès lors les équations précédentes donnent pour les coordonnées du centre de gravité cherché :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{M_1}{l} = \dfrac{\rho_0{}^2}{l} \\ y_1 = \dfrac{M_2}{l} = 0. \end{cases}$$

Centre de gravité du spiral dans la position déformée.

753. — En négligeant les infiniment petits du même ordre que ceux négligés par Ed. Phillips dans sa théorie des courbes terminales, nous pouvons admettre que l'angle $aO'C'$ est droit (fig. 222), ce qui nous conduit à des équations absolument identiques à celles que nous venons d'écrire, avec la seule différence que ρ_0 s'écrit ρ puisque la spire est déformée; c'est-à-dire qu'on aura pour les coordonnées demandées de ce point

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\rho^2}{L} = \dfrac{\rho_0{}^2}{L\left(1 \pm \dfrac{\alpha}{L}\rho_0\right)} \\ y_1 = 0, \end{cases}$$

en admettant que le centre de gravité du spiral se soit déplacé de O en O′ et que l'axe Ox passe par O′.

Mais l'axe du balancier doit toujours passer par O ; il suit de là que ce centre de gravité se déplace de $\dfrac{OO'}{2}$; c'est-à-dire que nous aurons :

$$(1) \begin{cases} x_{1d} = \dfrac{\rho_0{}^2}{L\left(1 + \dfrac{\alpha}{L}\rho_0\right)^2} \\ y_{1d} = \pm \dfrac{\rho_0{}^2}{2L} \cdot \dfrac{\alpha}{\left(1 \pm \dfrac{\alpha}{L}\rho_0\right)} = \pm \dfrac{\rho_0{}^2}{L\left(1 \pm \dfrac{\alpha}{L}\cdot\rho^0\right)}\dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$$

Représentation graphique du mouvement du centre de gravité, d'un spiral cylindrique dépourvu de courbes terminales à l'extrémité fixée dans le piton.

754. — Soit, comme dans l'exemple précédent, $\rho_0 = 40$ m/m et L = 1407,69 m/m. Le calcul des équations (1) nous don-

nera les valeurs suivantes de x_1 et y_1, quand α varie de 0 à $\pm 1{,}5\,\pi$:

α	x_1	y_1
$\frac{3\pi}{2}$	0,884	2,362
π	0,958	1,634
$\frac{\pi}{2}$	1,042	0,855
0	1,137	0
$-\frac{\pi}{2}$	1,245	— 0,934
$-\pi$	1,37	— 1,96
$-\frac{3\pi}{2}$	1,515	— 3,092.

L'échelle de la construction ci-contre peut-être à celle de la fig. 222 comme 20 : 1. Les flèches représentées à côté des positions des centres de gravité indiquent la direction de la force $K\,\overline{OO'}$. On voit que cette force agit toujours dans le même sens que le moment $M\alpha$ de la force du spiral.

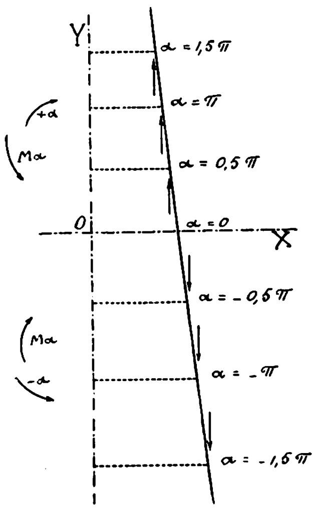


Fig. 223.

En reprenant maintenant l'équation

$$K\,\overline{OO'}\,x_{1\,d} = \pm K\frac{\rho_0^2}{L}\cdot\frac{\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)}\,x_{1\,d},$$

nous pouvons remplacer x_1 par sa valeur, afin de fixer la valeur du moment dû à la déformation excentrique. Nous obtiendrons

$$K\,\overline{OO'}.\,x_1 = \pm K\frac{\rho_0^2}{L}\cdot\frac{\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)}\cdot\frac{\rho_0^2}{L\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)^2}$$

ou

$$K\,\overline{OO'}.\,x_1 = \pm K\frac{\rho_0^4}{L}\cdot\frac{\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)^3}.$$

Remarquons que ce moment est résistant et qu'il a le même signe que $M\alpha$ car, si le balancier s'éloigne de sa position d'équilibre, le moment de la force du spiral agit en sens contraire du mouvement ; il en est de même du moment que nous venons de déterminer, à cause des relations de sens qui existent entre eux. Lorsque le balancier tourne en sens contraire, α change de sens en même temps que M ; $M\alpha$ reste donc négatif et le moment $K' . \overline{OO'} x_1$ aussi.

Nous pouvons donc écrire

$$A \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -M\alpha - K \frac{\rho_0^4}{L^2} \cdot \frac{\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L} \rho_0\right)^3}.$$

L'effet de cette déformation excentrique se traduit par une *avance* de la montre. Par suite, si, au spiral considéré, nous construisions une courbe terminale n'en modifiant pas la longueur, la montre *retarderait*.

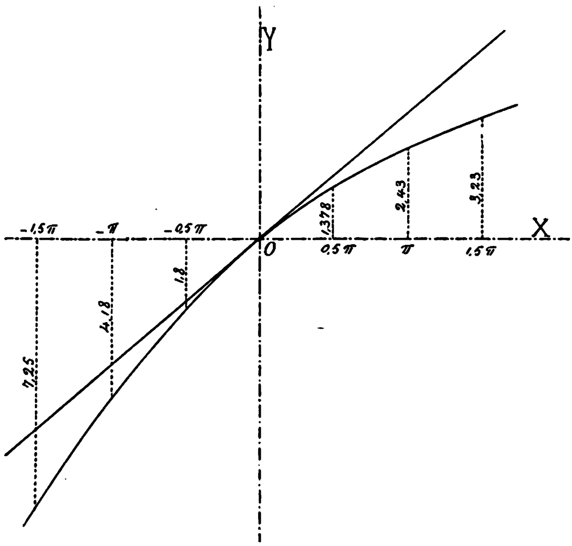


Fig. 224.

755. — Afin de savoir si la durée des grandes et des petites oscillations est la même dans le cas que nous envisageons, construisons graphiquement la formule

$$y_1 = \frac{\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L} \rho\right)^3}.$$

La droite de la figure 224 représente une fonction proportionnelle à α. ($y_2 = m\alpha$).

Quand α est positif, y est plus faible que l'y_2 correspondant

à la droite et la différence augmente avec α. Les grandes oscillations devraient donc avoir *moins d'avance que les petites*.

Le contraire a lieu lorsque α est négatif ; les valeurs de y_1 sont plus grandes que celles de y_2 et la différence augmente avec α. Les petites oscillations avancent donc moins que les grandes. Par conséquent les effets se compensent entre deux oscillations consécutives; pas exactement toutefois : il y a un excès du côté des α négatifs, mais qui est peu considérable, car l'avance produite par l'absence de la courbe n'est, ainsi que l'indique la figure, que de 1 à 2 minutes par 24 heures.

Remarquons encore que l'effet augmente avec ρ_0 ; ce qui montre qu'*il ne faut pas prendre des spiraux plats de trop grand rayon.*

Influence d'une courbe théorique intérieure sur la durée des oscillations.

756.— Après avoir ainsi examiné le cas d'un spiral cylindrique muni d'une seule courbe terminale fixée à la virole, envisageons maintenant celui d'un spiral analogue, muni également

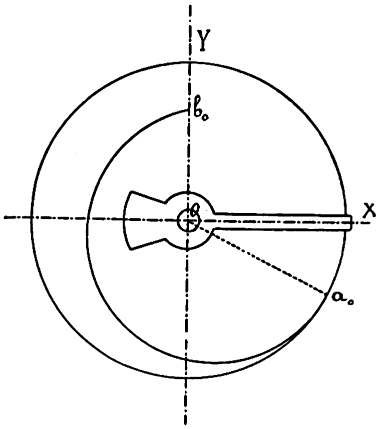


Fig. 225.

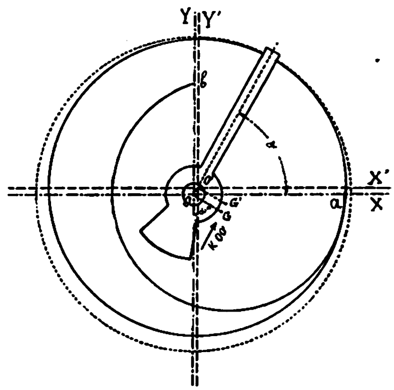


Fig. 226.

d'une seule courbe terminale, mais qui serait fixée au *piton*.

Servons-nous des mêmes données que pour les figures 221 et 222 ; la fig. 226 représente le balancier ayant tourné d'un

angle $\alpha = 60$. Les coordonnées du centre de gravité dans la position d'équilibre sont donc :

$$x_1 = 0$$
$$y_1 = -\frac{\rho_0^2}{L}.$$

Dans la position déformée, le centre de gravité aurait décrit un angle α, par rapport à deux axes Ox' et Oy' passant par le centre O' du spiral déformé, s'il n'était gêné par l'axe du balancier. Nous aurions donc, si cet axe n'existait pas :

$$x'_1 = \frac{\rho^2}{L} \sin \alpha = \frac{\rho_0^2}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)^2 L} \sin \alpha$$

$$y'_1 = -\frac{\rho^2}{L} \cos \alpha = -\frac{\rho_0^2}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)^2 L} \cos \alpha.$$

Mais comme l'axe du balancier demeure en O, le centre de gravité du spiral se déplacera de $\frac{OO'}{2}$ seulement, dans la direction $O'O$. Le déplacement, s'il correspond aux nouvelles coordonnées, est égal à

$$x' = \mp \frac{\rho_0^2}{2L} \frac{\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)} \cos \alpha$$

$$y' = \pm \frac{\rho_0^2}{2L} \cdot \frac{\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)} \sin \alpha.$$

Les coordonnées x_1 et y_1 du centre de gravité par rapport aux axes Ox et Oy sont donc :

$$x_1 = \frac{\rho_0^2}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)^2 L} \sin \alpha \mp \frac{\rho_0^2}{2L} \frac{\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)} \cos \alpha$$

$$y_1 = -\frac{\rho_0^2}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)^2 L} \cos \alpha \pm \frac{\rho^2}{2L} \cdot \frac{\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)} \sin \alpha,$$

ou

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{\rho_0{}^2}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right) L} \left(\frac{\sin \alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)} \mp \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \right) \\ y_1 &= - \frac{\rho_0{}^2}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right) L} \left(\frac{\cos \alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)} \pm \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \right). \end{aligned} \right.$$

Représentation graphique du mouvement du centre de gravité d'un spiral cylindrique dépourvu de courbes terminales à l'extrémité fixée à la virole.

757. — En admettant les mêmes données que dans le cas précédent, le calcul numérique des équations I nous donne les valeurs suivantes de x_1 et de y_1 pour un angle α variant de 0 à $\pm \frac{3\pi}{2}$:

α	x_1	y_1	OO′
$\frac{3\pi}{2}$	— 0,884	— 2,362	4,72365
$\frac{5\pi}{4}$	— 2,07	— 0,765	4,0154
π	— 1,64	+ 0,958	3,27815
$\frac{3\pi}{4}$	— 0,181	+ 1,593	2,51003
$\frac{\pi}{2}$	+ 1,042	+ 0,855	1,7091
$\frac{\pi}{4}$	+ 1,031	— 0,507	0,873207
0	0	— 1,136	0
$-\frac{\pi}{4}$	— 1,115	— 0,567	0,91307
$-\frac{\pi}{2}$	— 1,245	+ 0,934	1,8688
$-\frac{\pi}{4}$	+ 0.092	+ 1,938	2,87025
$-\pi$	+ 1,96	+ 1,37	3,9207

$-\frac{5\pi}{4}$	+ 2,735	— 0,758	5,0241
$-\frac{3\pi}{2}$	+ 1,515	— 3,092	6,18426.

Dans la construction ci-dessous (fig. 227), la courbe marquée

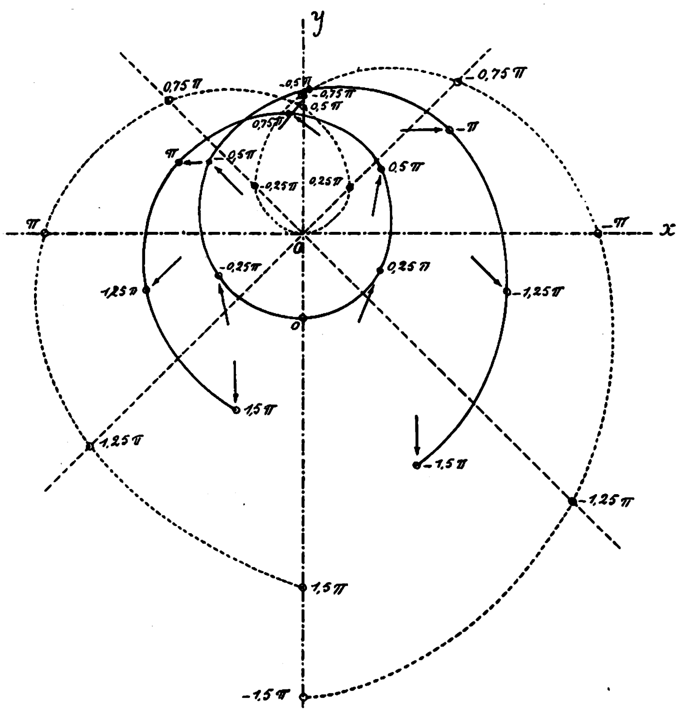


Fig. 227.

en noir indique le mouvement du centre de gravité, tandis que la ligne pointillée représente les distances OO′. Les flèches montrent les directions de la résultante agissant sur le balancier.

Connaissant maintenant les différentes positions du centre de gravité du spiral, nous déterminerons les composantes X et Y de la résultante R.

Cette force est dirigée de O en O′ ; elle forme donc avec Ox un angle α. Nous avons (fig. 228) :

$$Y = R \sin \alpha$$
$$X = R \cos \alpha.$$

Leur moment résultant par rapport au centre du balancier est

$$Yx - Xy$$

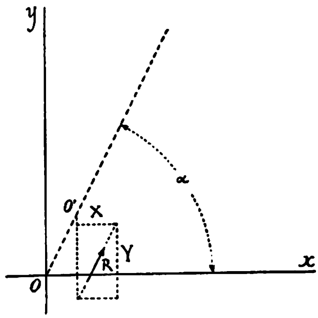


Fig. 228.

et, comme nous avons

$$K.\ OO'.\ x = \pm\ K \frac{\rho_0{}^2}{L} \frac{\alpha}{\left(1 + \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)} x,$$

nous pourrons écrire

$$R = K \frac{\rho_0{}^2}{L} \cdot \frac{\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)} \cdot$$

Alors, si nous nous servons des équations I, le moment de la résultante devient :

$$Yx - Xy = K \frac{\rho_0{}^4}{L^2} \frac{\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)^2} \left[\frac{\sin^2 \alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)} + \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \sin \alpha \right]$$

$$+ K \frac{\rho_0{}^4}{L^2} \frac{\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)^2} \left[\frac{\cos^2 \alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)} + \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \sin \alpha \right]$$

$$= K \frac{\rho_0{}^4}{L^2} \frac{\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)^3}.$$

Et l'équation d'équilibre du système sera :

$$A\omega.\ d\omega = -\ M\alpha.\ d\alpha + K \frac{\rho_0{}^4}{L} \cdot \frac{\alpha d\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)^3}.$$

L'effet de cette déformation non-concentrique est donc, ainsi que le montre l'équation ci-dessus, de *retarder* la marche. C'est le contraire de ce qui a lieu pour la courbe extérieure. On arriverait, par les mêmes considérations que dans le cas précédent, à la conclusion que le rapport de la durée des

grandes oscillations à celle des petites est sensiblement constant.

Durée des oscillations dans le cas d'un spiral dépourvu de courbes terminales.

758. — Nous avons déjà examiné cette question en nous plaçant à un point de vue purement descriptif (742). Reprenons le cas en le traitant par le calcul.

Nous envisagerons d'abord le cas d'un *spiral cylindrique* formé d'un nombre entier de tours, commençant et finissant sur Ox quand le balancier est au repos. Développons le spiral suivant la loi

$$\rho = \frac{\rho_0}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L} \rho_0\right)}.$$

Vu la fixité du piton, le centre de la spire supérieure se déplacera de O en O′ (fig. 229) de sorte que nous avons

$$OO' = \frac{\rho_0{}^2 \alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L} \rho_0\right) L}.$$

La longueur OO′ est exagérée à dessein sur la figure 229 pour les besoins de l'étude qui va suivre. Le spiral est représenté dans la position qu'il occupe lorsqu'on a fait décrire au balancier un certain angle α ; l'extrémité fixée à la virole est en a ; le centre de gravité du spiral par rapport à deux axes $O'x'$ et $O'y'$ passant par le centre O′ sera déterminé par

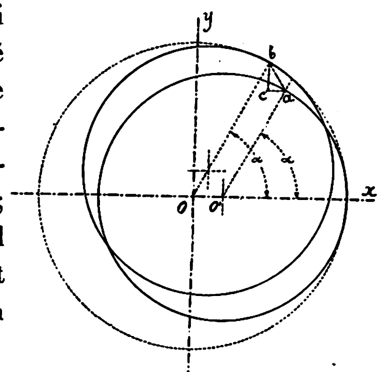


Fig. 229.

$$\Sigma\, y'.ds = \rho^2\,(1 - \cos\alpha)$$

et

$$\Sigma\, x'.ds = \rho^2 \sin\alpha\ ;$$

puisque $\Sigma\, ds = L$, il vient

$$\text{II}\left\{\begin{aligned} y' &= \frac{\rho^2(1-\cos\alpha)}{L} = \frac{\rho_0^2}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)^2 L}(1-\cos\alpha) \\ &\text{et} \\ x' &= \frac{\rho^2 \sin\alpha}{L} = \frac{\rho_0^2}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right) L}\sin\alpha. \end{aligned}\right.$$

Les coordonnées y_1 et x_1 du centre de gravité par rapport aux axes passant par O sont :

$$\text{III}\left\{\begin{aligned} y_1 &= \frac{\rho_0^2}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)^2 L}(1-\cos\alpha) \\ x_1 &= \frac{\rho_0^2}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)^2 L}\sin\alpha + \frac{\rho_0^2\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right) L} = \frac{\rho_0^2}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right) L}\left[\frac{\sin\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)} + \alpha\right]. \end{aligned}\right.$$

Comme le centre de la virole est en O, l'extrémité a du spiral doit venir en b et le centre de gravité se déplacera parallèlement à ab et de la moitié de cette distance. Les coordonnées (x_2, y_2) de a sont :

$$\begin{matrix}\text{IV} \\ a\,(x_2\ y_2)\end{matrix}\left\{\begin{aligned} y_2 &= \rho\sin\alpha = \frac{\rho_0}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)}\sin\alpha \\ x_2 &= \rho\cos\alpha + OO' = \frac{\rho_0}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)}\left[\frac{\rho_0}{L}\alpha + \cos\alpha\right] \end{aligned}\right.$$

et celles $(x_1\ y_1)$ de b :

$$b\,(x_1\ y_1)\left\{\begin{aligned} y_1 &= \rho_0\sin\alpha \\ x_1 &= \rho_0\cos\alpha, \end{aligned}\right.$$

d'où

$$\text{V}\left\{\begin{aligned} y_1 - y_2 &= \frac{\rho_0^2\,\alpha}{L\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)}\sin\alpha \\ x_1 - x_2 &= -\frac{\rho_0^2\,\alpha}{L\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)}(1-\cos\alpha). \end{aligned}\right.$$

En ajoutant à ces grandeurs respectivement la moitié de celles de x_1 et y_1, on obtiendra les coordonnées x et y du centre de gravité :

$$\text{VI} \left\{ \begin{aligned} y &= \frac{\rho_0^2}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)L}\left[\frac{1-\cos\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)} + \frac{\alpha}{2}\sin\alpha\right] \\ x &= \frac{\rho_0^2}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)L}\left[\frac{\sin\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)} + \frac{\alpha}{2}(1-\cos\alpha)\right]. \end{aligned} \right.$$

759. **Construction graphique.** — Les équations VI donnent les valeurs suivantes des coordonnées du centre de gravité pour différentes valeurs de α (fig. 230) :

α	x	y
$\frac{3\pi}{2}$	1,6459	— 1,6459
$\frac{5\pi}{4}$	0,0605	0,146
π	0	2,1045
$\frac{3\pi}{4}$	1,1877	2,8675
$\frac{\pi}{2}$	2,1072	2,1072
$\frac{\pi}{4}$	1,6897	0,6998
0	0	0
$-\frac{\pi}{4}$	— 1,8159	0,7549
$-\frac{\pi}{2}$	— 2,4633	2,4633
$-\frac{3\pi}{4}$	— 1,5184	4,3447
$-\pi$	0	3,1438
$-\frac{5\pi}{4}$	0,3391	0,8178
$-\frac{3\pi}{2}$	— 1,7671	— 1,7671,

a (fig. 229) est le point où le spiral devrait quitter la virole quand la déformation se fait suivant la loi

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0},$$

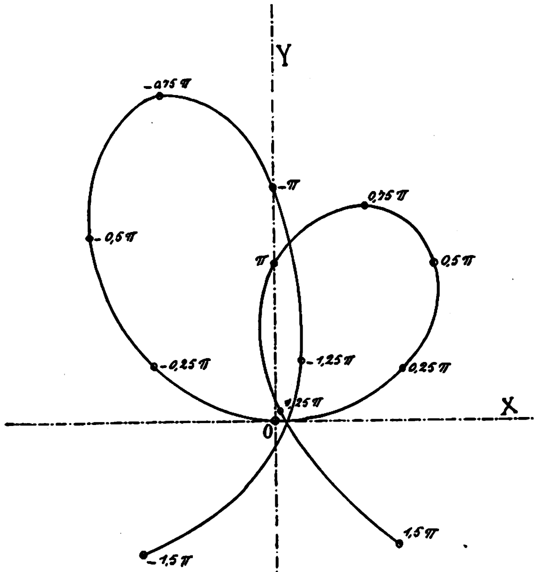


Fig. 230.

et *b* celui où le spiral quitte réellement la virole; la force reçue par le balancier doit donc être proportionnelle à *ba* et avoir cette direction, déterminée par l'angle γ que forme *ba* avec Ox.

Cet angle est donné par

$$\text{tang.}\,\gamma = \frac{\sin\alpha}{-(1-\cos\alpha)},$$

ce qui se vérifie en divisant la première des équations V par la deuxième.

Les composantes Y et X de la force K. *ba* sont, si K = 1, données précisément par les équations V, c'est-à-dire qu'on aura :

$$Y = \frac{\rho_0^2\,\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)L}\sin\alpha$$

$$X = -\frac{\rho_0^2\,\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)L}(1-\cos\alpha).$$

Multiplions-les respectivement par les coordonnées y et x du centre de gravité (VI) ; nous obtiendrons :

$$Yx = \frac{\rho_0^4\,\alpha}{L^2\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)^2}\left[\frac{\sin^2\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)} + \frac{\alpha}{2}(1+\cos\alpha)\sin\alpha\right]$$

$$Xy = -\frac{\rho_0^4 \alpha}{L^2\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)^2}\left[\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)} + \frac{\alpha}{2}(1-\cos\alpha)\sin\alpha\right],$$

d'où

$$\text{VII.}\quad Yx - Xy = \frac{\rho_0^4}{L^2}\frac{\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)^2}\left[\frac{\sin^2\alpha + (1-\cos\alpha)^2}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)} + \alpha\sin\alpha\right]$$

et

$$\text{VIII.}\quad A\omega.d\omega = -M\alpha d\alpha - K\frac{\rho_0^4}{L^2}\frac{\alpha d\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)^2}\left[\frac{\sin^2\alpha + (1-\cos\alpha)}{1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0}\right]$$

L'équation VII peut aussi s'écrire :

$$Yx - Xy = \frac{\rho_0^4}{L^2}\frac{\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)^2}\left[\frac{2(1-\cos\alpha)}{1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0} + \alpha\sin\alpha\right].$$

760. — Le calcul numérique de l'équation ainsi établie donne les résultats suivants :

α	$Yx - Xy$	α	$Yx - Xy$
$\frac{7\pi}{4}$	$-21,877$	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	$-17,175$	$-\frac{7\pi}{4}$	$-41,608$
$\frac{5\pi}{4}$	$+2,008$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-24,948$
π	$+12,157$	$-\frac{5\pi}{4}$	$+9,356$
$\frac{3\pi}{4}$	$+16,005$	$-\pi$	$+27,946$
$\frac{\pi}{2}$	$+8,027$	$-\frac{3\pi}{4}$	$+39,455$
$\frac{\pi}{4}$	$+1,362$	$-\frac{\pi}{2}$	$+13,058$
0	0	$-\frac{\pi}{4}$	$+1,548$

La fig. 231 représente le tracé graphique des fonctions ci-dessus.

Le graphique (fig. 232) représente les sommes des valeurs

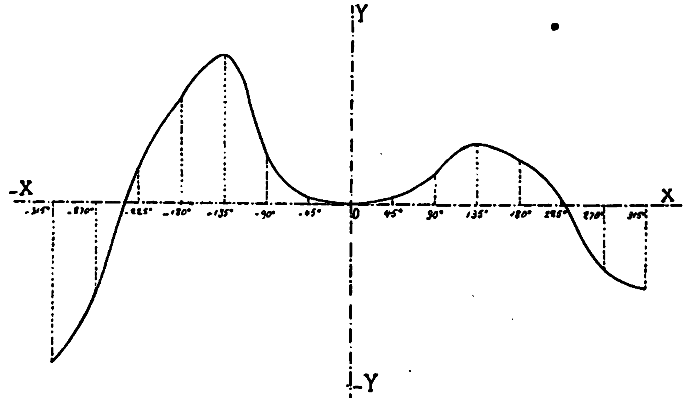
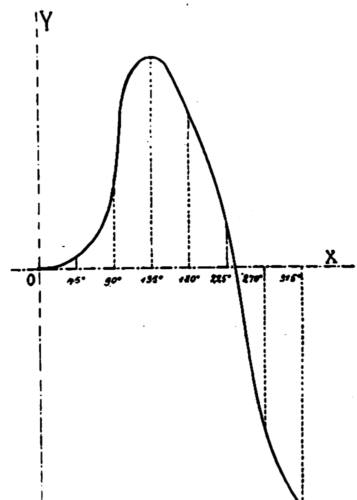


Fig. 231.

$Yx - Xy$ correspondant à des angles α égaux, mais de signes contraires. Nous renvoyons à plus loin les enseignements à tirer de ces courbes.

Même calcul pour un spiral composé d'un nombre fractionnaire de tours dans la position de repos.

761. — Il y aura donc un nombre entier de tours, plus



Courbe des sommes.

Fig. 232.

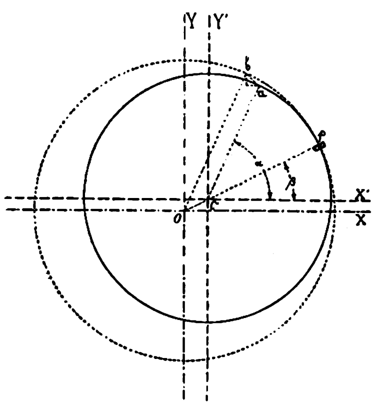


Fig. 233.

une certaine fraction xp (fig. 233). Le spiral se détache du piton au point p et de la virole en x dans la position de repos. Désignons

l'angle xOp par β. Si nous faisons décrire au balancier un angle α en supposant que le spiral puisse se développer suivant la loi

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0},$$

le centre des spires viendra se placer sur Op, en O' par exemple, si α est positif ; de telle manière que nous aurons

$$OO' = \frac{\rho_0^2\, \alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right) L}.$$

Les coordonnées du centre de gravité du spiral par rapport aux axes Ox' et Oy', passant par O', seront données comme précédemment par les équations :

$$\Sigma y' ds = \rho^2 (1 - \cos\alpha) - \rho^2 (1 - \cos\beta) = \rho^2 (\cos\beta - \cos\alpha)$$

$$\Sigma x' ds = \rho^2 . \sin\alpha - \rho^2 \sin\beta = \rho^2 (\sin\alpha - \sin\beta),$$

d'où, en remplaçant α par sa valeur :

$$\text{IX} \left\{ \begin{aligned} y' &= \frac{\rho_0^2}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)^2 L} (\cos\beta - \cos\alpha) \\ x' &= \frac{\rho_0^2}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)^2 L} (\sin\alpha - \sin\beta). \end{aligned} \right.$$

Les coordonnées du centre O' par rapport aux anciens axes Ox, Oy seront :

$$\text{X} \left\{ \begin{aligned} y &= OO' \sin\beta = \frac{\rho_0^2\, \alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right) L} \sin\beta \\ x &= OO' \cos\beta = \frac{\rho_0^2\, \alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right) L} \cos\beta. \end{aligned} \right.$$

Pour obtenir les coordonnées par rapport à O du centre de gravité du spiral déformé, il suffira d'additionner IX et X, ce qui donne :

$$\left\{\begin{aligned} y_0 &= \frac{\rho_0{}^2}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)^2 L}(\cos\beta - \cos\alpha) + \frac{\rho_0{}^2\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)L}\sin\beta \\ x_0 &= \frac{\rho_0{}^2}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)^2 L}(\sin\alpha - \sin\beta) + \frac{\rho_0{}^2\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)L}\cos\beta, \end{aligned}\right.$$

ou, après simplification :

$$\text{XI}\left\{\begin{aligned} y_0 &= \frac{\rho_0{}^2}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)L}\left[\frac{\cos\beta - \cos\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)} + \alpha\sin\beta\right] \\ x_0 &= \frac{\rho_0{}^2}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)L}\left[\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)} + \alpha\cos\beta\right]. \end{aligned}\right.$$

Le point d'attache du spiral à la virole devrait se trouver en a ; mais, à cause de la distance fixe $Ob = Ox = \rho_0$, le point a se déplacera en b; les coordonnées x' y' de a par rapport à $O'x'$ et $O'y'$ sont :

$$\left\{\begin{aligned} y' &= \frac{\rho_0}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)}\sin\alpha \\ x' &= \frac{\rho_0}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)}\cos\alpha, \end{aligned}\right.$$

puis, par rapport aux axes Ox et Oy :

$$\text{XII}\left\{\begin{aligned} y_1 &= \frac{\rho_0}{1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0}\sin\alpha + \frac{\rho_0{}^2\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)L}\sin\beta \\ x_1 &= \frac{\rho_0}{1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0}\cos\alpha + \frac{\rho_0{}^2\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)L}\cos\beta. \end{aligned}\right.$$

Les coordonnées de b par rapport aux axes Ox et Oy sont:

$$\text{XIII}\qquad\left\{\begin{aligned} y_2 &= \rho_0\sin\alpha \\ x_2 &= \rho_0\cos\alpha, \end{aligned}\right.$$

XII et XIII nous donnent les expressions de $x_2 - x_1$ et $y_2 - y_1$, comme dans le cas précédent :

$$\text{XIV}\left\{\begin{aligned} y_2 - y_1 &= \frac{\rho_0^2\,\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right) L}(\sin\alpha - \sin\beta) \\ x_2 - x_1 &= \frac{\rho_0^2\,\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right) L}(\cos\alpha - \cos\beta). \end{aligned}\right.$$

a s'étant déplacé en b, les coordonnées du centre de gravité du spiral devront varier de la moitié des valeurs fournies par XIV ; ces coordonnées seront par conséquent, après la déformation :

$$\text{XV}\left\{\begin{aligned} y &= \frac{\rho_0^2}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right) L}\left[\frac{\cos\beta - \cos\alpha}{1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0} + \frac{\alpha}{2}(\sin\beta - \sin\alpha)\right] \\ x &= \frac{\rho_0^2}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right) L}\left[\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0} + \frac{\alpha}{2}(\cos\beta + \cos\alpha)\right]. \end{aligned}\right.$$

On trouverait, comme dans le cas précédent, pour déterminer l'angle γ de la droite ba suivant laquelle est dirigée la force d'impulsion reçue par le balancier, la relation

$$tg\,\gamma = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta}.$$

Les composantes Y et X de la force K.ba, sont, pour la valeur 1 de K, données par XIV. Les moments qu'elles exercent par rapport à O, sont :

$$Yx = \frac{\rho_0^4}{L^2}\frac{\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)^2}\left[\frac{(\sin\alpha - \sin\beta)^2}{1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0} + \frac{\alpha}{2}(\cos\alpha + \cos\beta)(\sin\alpha - \sin\beta)\right]$$

$$Xy = -\frac{\rho_0^4}{L^2}\frac{\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)^2}\left[\frac{(\cos\beta - \cos\alpha)^2}{1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0} + \frac{\alpha}{2}(\cos\beta - \cos\alpha)(\sin\alpha + \sin\beta)\right]$$

$$Yx - Xy = \frac{\rho_0^4}{L^2}\frac{\alpha}{\left(1 \pm \frac{\alpha}{L}\rho_0\right)^2} \times$$

$$\left\{\frac{(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\beta-\cos\alpha)^2}{\left(1\pm\frac{\alpha}{L}\rho_0\right)}+\frac{\alpha}{2}\left[(\sin\alpha-\sin\beta)(\cos\alpha+\cos\beta)+(\cos\beta-\cos\alpha)(\sin\alpha+\sin\beta)\right]\right\},$$

ou encore

$$Yx-Xy=\frac{\rho_0{}^4}{L^2}\frac{\alpha}{\left(1\pm\frac{\alpha}{L}\rho_0\right)^2}\left[\frac{(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\beta-\cos\alpha)^2}{1\pm\frac{\alpha}{L}\rho_0}+\alpha\sin(\alpha-\beta)\right],$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$\text{XVI.}\quad Yx-Xy=\frac{\rho_0{}^4}{L^2}\frac{\alpha}{\left(1\pm\frac{\alpha}{L}\rho_0\right)^2}\left\{\frac{2[1-\cos(\alpha-\beta)]}{1\pm\frac{\alpha}{L}\rho_0}+\alpha\sin(\alpha-\beta)\right\}.$$

Nous allons soumettre cette équation à l'application pratique.

762. **Calcul numérique.** — Nous ferons varier l'angle α de $\frac{3\pi}{2}$ à $-\frac{3\pi}{2}$ pour 3 valeurs de β, soit 90°, 180° et 270°.

1er cas $\quad \beta=\frac{\pi}{2}=90°$ (Fig. 234 et 235.)

α	$Yx-Xy$	α	$Yx-Xy$
$\frac{7\pi}{4}$	— 4,690	$-\frac{7\pi}{4}$	42,495
$\frac{3\pi}{2}$	15,995	$-\frac{3\pi}{2}$	0
$\frac{5\pi}{4}$	22,934	$-\frac{5\pi}{4}$	— 12,843
π	16,238	$-\pi$	— 4,394
$\frac{3\pi}{4}$	5,641	$-\frac{3\pi}{4}$	6,593
$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	8,801
$\frac{\pi}{4}$	0,0166	$-\frac{\pi}{4}$	4,070

2e cas $\beta=\pi=180°$ (Fig. 236 et 237.)

α	$Yx-Xy$	α	$Yx-Xy$
$\frac{7\pi}{4}$	37,462	$-\frac{7\pi}{4}$	75,745

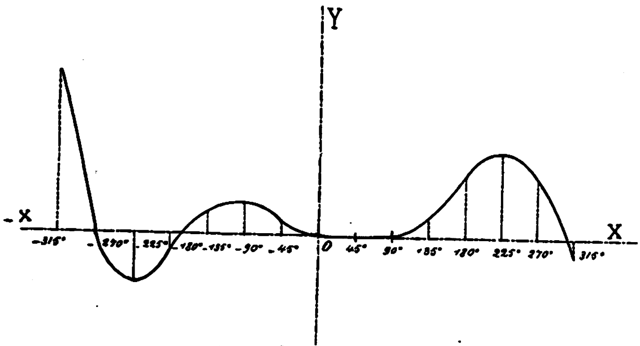
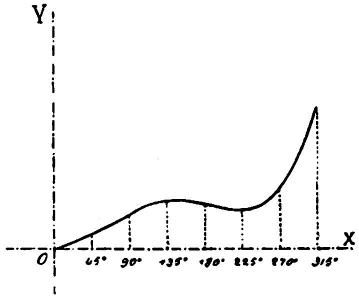


Fig. 234



Courbe des sommes.

Fig. 235.

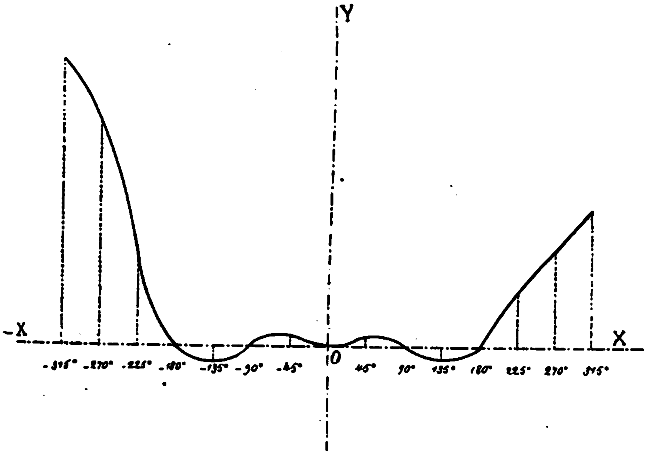
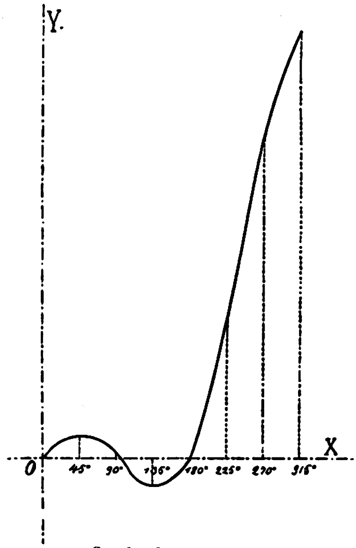


Fig. 236.



Courbe des sommes.

Fig. 237.

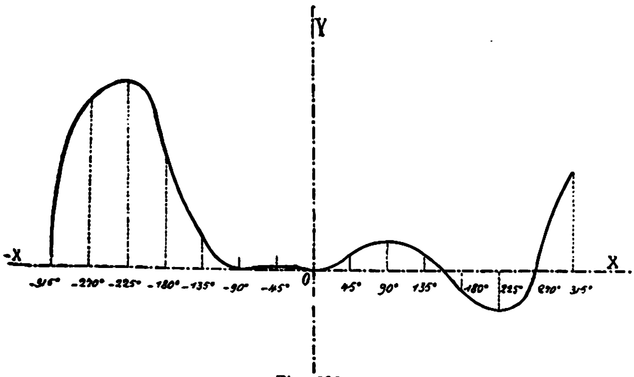
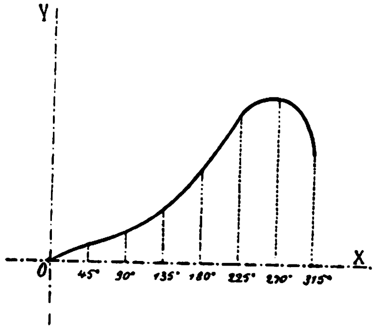


Fig. 238.



Courbe des sommes.

Fig. 239.

$\frac{3\pi}{2}$	25,136	$-\frac{3\pi}{2}$	59,492
$\frac{5\pi}{4}$	14,011	$-\frac{5\pi}{4}$	23,031
π	0	$-\pi$	0
$\frac{3\pi}{4}$	— 3,092	$-\frac{3\pi}{4}$	— 3,772
$\frac{\pi}{2}$	0,659	$-\frac{\pi}{2}$	1,211
$\frac{\pi}{4}$	2,797	$-\frac{\pi}{4}$	3,237

3° cas $\beta = \frac{3\pi}{2} = 270°$ (Fig. 238 et 239.)

α	$Yx - Xy$	α	$Yx - Xy$
$\frac{7\pi}{4}$	26,071	$-\frac{7\pi}{4}$	2,439
$\frac{3\pi}{2}$	0	$-\frac{3\pi}{2}$	44,013
$\frac{5\pi}{4}$	— 10,390	$-\frac{5\pi}{4}$	49,496
π	— 5,066	$-\pi$	30,208
$\frac{3\pi}{4}$	4,589	$-\frac{3\pi}{4}$	9,2292
$\frac{\pi}{2}$	8,035	$-\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{\pi}{4}$	4,286	$-\frac{\pi}{4}$	0,0542

Conclusions pratiques à la théorie de l'influence des courbes terminales.

763. — En résumé, nous voyons que des courbes non théoriques ou l'absence de courbes produisent, non seulement une excentricité de la position du centre de gravité du spiral, mais conditionnent l'existence du terme $Yx - Xy$, et que, dans la marche de la montre, ce terme a une influence perturbatrice sur l'isochronisme des oscillations du balancier.

Nous avons étudié le cas d'un spiral cylindrique en le sup-

posant d'abord dépourvu de courbe extérieure, puis dépourvu de courbe intérieure, et enfin dépourvu de l'une et l'autre.

Toutes les conclusions que nous pouvons tirer de ces cas particuliers, sont entièrement applicables au *spiral plat*, avec cette restriction, toutefois, que les influences produites sont relativement plus considérables pour un spiral cylindrique que pour un spiral plat, puisque les rayons de courbure d'une spirale d'Archimède sont plus petits au centre et produisent un plus faible déplacement du centre de gravité ainsi qu'une déformation moins excentrique. Lorsque le balancier est en mouvement, l'effort exercé par un développement excentrique du spiral se traduit par une force dont le moment s'ajoute ou se retranche du moment $M\alpha$ de la force du spiral, ce qui détruit l'isochronisme par l'introduction d'une inégalité dans la durée des grandes et des petites oscillations.

Cette force est complexe; elle dépend non seulement de l'arc décrit par le balancier dans l'un ou l'autre sens, mais encore de l'angle β formé par les deux rayons aboutissant aux points d'attache de la virole et du piton.

On peut ainsi se rendre compte de la variabilité de l'influence de cette force pendant l'expansion et la contraction du spiral.

Nous remarquons tout d'abord que, *pour qu'une montre soit bien réglée, il faut la munir de courbes théoriques*, et que tout écart de cette règle a pour conséquence des variations de marche dans les différentes positions. Les graphiques précédents donnent le sens de ces variations.

764.— Examinons d'abord le premier. Il se rapporte à un spiral *dépourvu* de courbes terminales et dont les points d'attache forment entre eux un angle au centre égal à zéro; ils sont donc situés sur une même droite (fig. 240). Le graphique (fig. 232) montre que, dans ce cas, la montre aura une avance assez prononcée pour une amplitude de 90° à 135°, avance qui diminue ensuite pour de plus grandes amplitudes et se change en retard pour une amplitude de 270° (1 tour ½) et plus. En comparant, ce graphique avec le suivant (fig. 235), où

les points d'attache forment entre eux un angle au centre de 90°, on voit que les effets produits par le travail excentrique du spiral sont différents : il se produit une petite *avance* pour une amplitude de 1° à 135°, avance qui s'accentue quand l'arc d'oscillation dépasse 270°. Or, pour le cas précédent, nous avions dans les mêmes conditions un fort *retard*.

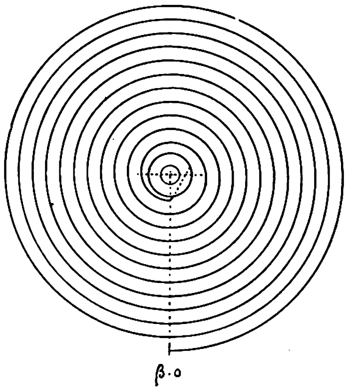


Fig. 240.

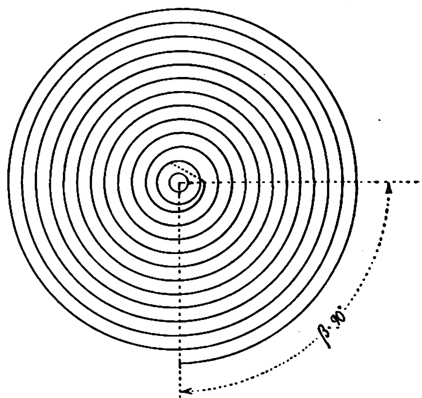


Fig. 341.

Si nous comparons encore le graphique (fig. 235) avec le suivant, nous voyons que les effets sont à peu près inverses à partir d'une amplitude de 45° jusqu'à une amplitude de 270° ; mais l'avance est beaucoup plus marquée dans ce dernier cas. On peut ainsi voir qu'entre ces deux positions d'attache, il peut se trouver un certain angle β pour lequel les oscillations se rapprochent de l'isochronisme pour des amplitudes comprises entre un $^1/_2$ tour et 1 tour $^1/_4$. Enfin le graphique (fig. 239) nous donne une représentation de la marche pour un angle β de 270° (fig. 243), et, en comparant

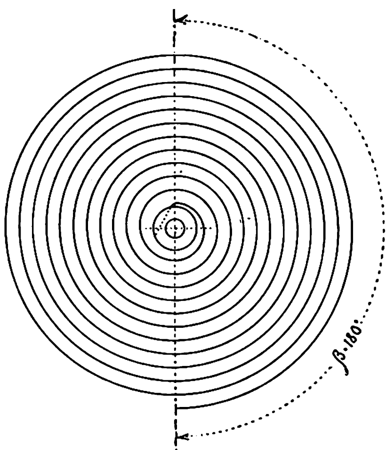


Fig. 242.

avec le précédent, on pourra voir qu'il existe certainement un angle β pour lequel les oscillations se rapprochent de l'isochronisme quand les amplitudes sont comprises entre 1 tour et $1^1/_2$ tour.

M. Caspari a traité le même sujet pour un spiral dépourvu de courbes terminales, dans le but de déterminer les positions relatives des points d'attache qui produisent l'isochronisme; il est arrivé à cette conclusion que ces points sont angulairement distants de

$$n \times 360 + 100^o \quad \text{et} \quad n \times 360 + 260^o,$$

Ses conclusions sont donc conformes aux nôtres.

Si maintenant nous examinons la figure donnant les graphiques qui correspondent aux valeurs positives et négatives de l'amplitude, nous verrons que l'effet produit par la force agissante est différent pour deux angles égaux et de signe contraire. Ainsi dans la fig. 238, pour une amplitude de 225o par exemple, on remarquera que le sens de la variation est tout à fait opposé.

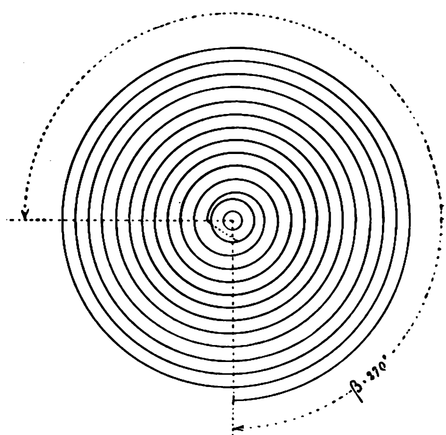


Fig. 243.

Supposons un chronomètre de marine muni d'un spiral cylindrique sans courbes théoriques; cet organe devant fonctionner en position horizontale, on comprendra qu'il soit impossible d'arriver à produire dans ces conditions l'isochronisme. En effet, aussi longtemps que l'amplitude des oscillations demeure invariable, aucun défaut ne se manifestera; mais, aussitôt que, par suite de l'épaississement des huiles par exemple, l'amplitude diminuera, la marche subira des influences conformes aux indications graphiques. Remarquons que nous faisons, pour le moment, abstraction de l'effet de la force centrifuge.

765.— Pour le réglage dans les positions, on se propose de corriger les influences des frottements des pivots ; mais l'excentricité du centre de gravité du spiral donne naissance, dans les quatre positions verticales, à une force dirigée vers le centre de la terre. Par suite le frottement des pivots ne sera plus uniforme ; il se produira donc des effets variables selon le genre de pression, variable aussi, que le balancier doit subir.

En somme, on constate qu'aucune des quatre positions examinées ne permet l'existence d'oscillations isochrones au balancier, et, à ce propos, il est bon de dire qu'il faut absolument renoncer à corriger un défaut de réglage provenant d'un défaut quelconque en rendant le spiral « anisochrone », en introduisant par exemple une excentricité du centre de gravité.

On obtiendra peut-être ainsi un réglage du plat ou pendu pendant un certain temps, mais on verra que ce réglage n'a rien de stable. Dès que l'huile s'épaissira et que l'amplitude des oscillations diminuera, les défauts réapparaîtront amplifiés, ce qui fera d'une montre qui aurait pu donner de bons résultats à l'observatoire, une pièce dont la marche sera à peine comparable à celle d'une pièce d'horlogerie ordinaire.

766.— Les anciens horlogers, nos grands maîtres à qui nous sommes redevables de tant d'inventions en mécanique comme en horlogerie, n'avaient pas d'idées claires sur le rôle du spiral. Bien qu'ils appelassent souvent le spiral l'âme de la montre, ils lui attribuaient aussi parfois des qualités mystérieuses qu'ils ne pouvaient préciser. Donnons-en quelques exemples.

Leroy croyait avoir trouvé la condition d'isochronisme dans une certaine longueur du spiral. Il prétendait, avec d'autres horlogers, qu'on pouvait même trouver plusieurs longueurs différentes également propres à assurer l'isochronisme. Or, il résulte des recherches de Phillips que, pour un spiral pourvu à chacune de ses extrémités d'une courbe théorique, la longueur de la lame n'a aucune influence sur la durée relative des grandes et des petites oscillations. Il est cepen-

dant bon de faire remarquer qu'un spiral trop court ne peut pas donner un développement concentrique, et que si, dans ce cas, il y a une différence entre les durées des grandes et des petites oscillations, il faut l'attribuer, au développement non concentrique qui, il est vrai, dérive de la précédente cause. L'inertie des molécules du spiral joue aussi un certain rôle et nous avons dit que nous y reviendrons plus loin..

767. — La recherche des conditions d'isochronisme avait beaucoup préoccupé les anciens horlogers et principalement les fabricants de chronomètres de marine. A cette époque, on ne songeait pas aux effets de la force centrifuge dont M. Constant Rozé, de Paris, avait signalé l'importance. Cette force a pour effet de raccourcir la durée des petites oscillations par rapport à celles des grandes pour un balancier coupé. La fig. 237 nous montre qu'un spiral formé, dans la position de repos, d'un nombre entier de tours plus un demi-tour produit un effet contraire à celui de la force centrifuge, qui peut éventuellement servir de force compensatrice. La fig. 232, au contraire, montre qu'un spiral formé d'un nombre entier de tours donne une avance à la marche quand l'amplitude des oscillations tombe de 1 $^3/_4$ tour à $^3/_4$ de tour. Ceci nous fournit un moyen de régler l'isochronisme d'un chronomètre de marine, surtout s'il est muni d'un spiral cylindrique.

Admettons maintenant que la montre soit munie d'un spiral cylindrique d'un nombre entier de tours plus $^3/_4$ de tour. Si l'isochronisme n'est pas réalisé, il faut raccourcir le spiral d'une très petite quantité et peut-être à plusieurs reprises. On remarquera alors que la différence de durée entre les grandes et les petites oscillations aura varié ; mais cette variation est uniquement attribuable à un changement dans le développement du spiral. C'est ce qui explique que plusieurs longueurs différentes peuvent assurer l'isochronisme ; car, si un spiral formé de dix tours et une certaine fraction de tour répond au but, un spiral de neuf tours plus cette même fraction y répondra aussi.

768.— Berthoud, de son côté, avait cherché à réaliser l'isochronisme en employant un spiral en forme de fouet, dont l'épaisseur variait graduellement d'une extrémité à l'autre.

Voici un exemple pratique où ces considérations trouvèrent leur application.

Il s'agit d'une montre de 50 mm. de diamètre, fabriquée par Ab.-L. Breguet, avec échappement à ressort, pourvue de deux barillets sans fusée, pouvant marcher 42 heures après le remontage, spiral cylindrique en fouet, plus épais à la virole qu'au piton, sans courbes terminales.

Voici les résultats de sa marche diurne dans la position horizontale aux différents degrés de tension des ressorts de barillet.

De 0 à 12	heures	0 s.
De 12 à 24	»	+ 20 s. avance.
De 24 à 36	»	+ 40 s. avance.
De 36 à 40	»	+ 40 s. avance.

La marche dans les quatre positions verticales différait de plus de 2 minutes. Le balancier compensé était pourvu de 4 clefs de réglage. En le maintenant dans les petites oscillations, nous avons réglé la disposition des clefs de manière à rendre la marche uniforme dans les quatre positions verticales à la limite de 5 s.; en essayant ensuite les marches dans ces quatre positions verticales aux grandes oscillations, nous avons trouvé des différences allant jusqu'à 50 s., ce qui était certainement attribuable au déplacement du centre de gravité du spiral dans les grandes oscillations.

La montre n'avait pas de raquette; le spiral était encastré dans le piton et serré par deux vis, ce qui permettait de dégager facilement son extrémité. En remettant, après ces essais, le balancier avec son spiral et la virole sur l'outil à vérifier l'équilibre, nous avons pu constater que le centre de gravité de tout le système tombait rigoureusement sur l'axe du balancier. C'était là une confirmation du résultat obtenu par le réglage des clefs d'après les marches observées dans les petites oscillations.

Cette montre ne donnant pas des résultats de marche satisfaisants, nous avons corrigé d'abord la virole, qui était très massive et complètement déséquilibrée ; nous avons mis également le balancier d'équilibre et adjoint au spiral des courbes théoriques terminales.

Sans autre retouche que celle-là, nous sommes arrivés à une marche très régulière; la plus grande différence entre les positions verticales était tombée à 6 s. et la variation du plat au pendu restait de 4 s. de retard au pendu. Avant la retouche, il y avait une avance de 20 s. de la marche moyenne dans les quatre positions verticales sur l'avance dans la position horizontale. Nous voyons donc qu'on ne pouvait pas attribuer le défaut d'isochronisme au fait que le spiral était en fouet, mais bien plutôt à son développement excentrique.

Influence d'une excentricité du centre de gravité d'une ancre munie de la fourchette sur la durée des oscillations du balancier dans les diverses positions verticales.

769. — Est-il nécessaire que le centre de gravité de l'ancre munie d'une fourchette faisant corps avec elle se trouve sur l'axe?

Cette question, souvent posée, est intéressante. Nous faisons abstraction du cas tout-à-fait extraordinaire où cette excentricité est si grande que le fonctionnement régulier de l'échappement en souffre. C'est ce qui pourrait arriver si, par suite d'un choc extérieur, l'excentricité contribuait à dégager la dent de la roue du plan de repos de l'ancre, de façon que le dard de la fourchette tombant sur la circonférence du plateau y occasionnerait un frottement.

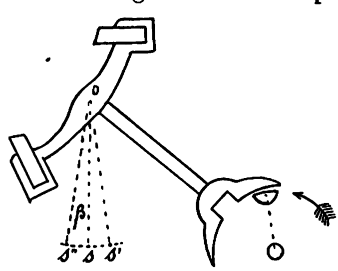


Fig. 244.

Si le centre de gravité de ce système se trouve sur une

horizontale, au pendu, il se produira une avance dans l'une des oscillations, et un retard égal dans l'autre. Il y a entière compensation. Dans cette position un choc extérieur pourrait troubler le bon fonctionnement de l'échappement.

770. — Envisageons maintenant le cas où le centre de gravité du système se trouve sur une verticale passant par le centre de l'ancre ; la fig. 244 le suppose sur Os au-dessous de l'axe de l'ancre, le balancier étant au repos.

Désignons par β les angles sOs' dont l'ancre tourne à chaque oscillation à partir de sa position médiane. (Dans la pratique $\beta = 5^0$ augmentés de l'angle correspondant au chemin perdu).

A la demi-oscillation descendante indiquée par la flèche, le moment de la force, appliquée au centre de gravité de l'ancre, agit dans le même sens que celle du spiral et produit une avance. Dans la demi-oscillation ascendante ce moment agit également dans ce sens, et produit donc encore une avance.

771. — Quelle est la grandeur de cette avance ?

Le calcul comprend deux périodes. La première, pendant laquelle le balancier décrit l'angle $\alpha_0 - \alpha_1$ correspondant au point où la cheville du plateau rencontre l'entrée de la fourchette.

La durée t_1 de cette période est, d'après ce qui a été maintes fois rappelé,

$$t_1 = \sqrt{\frac{A}{M}} \text{ arc cos } \frac{\alpha_1}{\alpha_0}.$$

La seconde période t_2 est celle pendant laquelle le balancier décrit l'angle α_1.

Déterminons la vitesse angulaire du balancier. On sait, d'après la mécanique, que la variation de la puissance vive d'un corps en mouvement est égale au travail produit.

La variation de puissance vive est ici

$$\frac{1}{2} A \left(\omega^2 - \omega_1^2\right)$$

et le travail mécanique produit par le spiral

$$\frac{1}{2}M\,(\alpha_1^2 - \alpha^2).$$

Pour avoir le travail total, il faut tenir compte de celui de la force appliquée au centre de gravité de l'ancre.

Soit p le poids de l'ancre avec la fourchette, r la distance du centre de gravité à l'axe de l'ancre ; le moment de la force p est alors :

$$M = p\,r \sin\beta = p\,r\,\beta,$$

à cause de la petitesse de l'angle β.

Posons que β est proportionnel à α :

$$\beta = c.\alpha,$$

c étant un facteur de proportionnalité.

Alors

$$M = p.\ r.\ \beta = p.\ r.\ c\,\alpha.$$

ou, si

$$p\,r\,c = K,$$
$$M = prc.\ \alpha = K\alpha$$

Le travail correspondant à ce moment est

$$\frac{1}{2}K(\alpha_1^2 - \alpha^2).$$

En appliquant le théorème que nous avons rappelé plus haut, il vient :

$$\frac{1}{2}A\,(\omega^2 - \omega_1^2) = \frac{1}{2}M\,(\alpha_1^2 - \alpha^2) + \frac{1}{2}K\,(\alpha_1^2 - \alpha^2),$$

d'où

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \left(\frac{M+K}{A}\right)(\alpha_1^2 - \alpha^2),$$

et comme

il vient : $d\alpha = \omega\,dt$,

$$\int_0^{t_2} dt = \int_0^{\alpha_1} \frac{d\alpha}{\sqrt{\omega_1^2 + \left(\frac{M+K}{A}\right)(\alpha_1^2 - \alpha^2)}} = \frac{d\alpha}{\sqrt{\omega_1^2 + \frac{M+K}{A}\alpha_1^2 - \frac{(M+K)}{A}\alpha^2}},$$

Expression dont l'intégrale nous est connue.

Nous obtenons :

$$t_2 = \sqrt{\frac{A}{M+K}} \arc \sin \left\{ \alpha_1 \sqrt{\frac{\frac{M+K}{A}}{\omega_1{}^2 + \frac{M+K}{A}\alpha_1{}^2}} \right\}.$$

Si nous posons

$$\omega_1{}^2 = \frac{M}{A}\left(\alpha_0{}^2 - \alpha_1{}^2\right),$$

d'après ce qui précède, et puisque pour

$$\alpha = \alpha_0 \qquad \omega = 0,$$

il vient

$$t_2 = \sqrt{\frac{A}{M+K}} \text{ arc sin } \alpha_1 \sqrt{\frac{M+K}{M(\alpha_0{}^2 - \alpha_1{}^2) + (M+K)\alpha_1{}^2}}$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{A}{M+K}} \text{ arc sin } \alpha_1 \sqrt{\frac{M+K}{M\alpha_0{}^2 + K\alpha_1{}^2}}$$

dès lors on aura, pour la durée d'une demi-oscillation,

$$\frac{T}{2} = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{A}{M}} \text{arc cos}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right) + \sqrt{\frac{A}{M+K}} \text{arc sin } \alpha_1 \sqrt{\frac{M+K}{M\alpha_0{}^2 + K\alpha_1{}^2}}.$$

772. — **Application.**

Supposons que la fourchette fasse lever le balancier de 40° ; alors $\alpha_1 = 20°$. Soit $p = 0{,}016$ le poids de l'ancre et de la fourchette, $r = 0{,}5$ l'excentricité du centre de gravité pour $\beta = 5°$.

Alors

$$c = \frac{1}{4} \text{ et } K = prc = \frac{0{,}016 \times 0{,}5}{4} = 0{,}002$$

Si le balancier fait 1 tour, c'est-à-dire si

$$\alpha_0 = 180°,$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \frac{20]}{180} = \frac{1}{9} = 0{,}1111\ldots\ldots$$

$$\text{arc cos}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right) = 83°\ 37'\ 14'',21 = 1{,}457455.$$

parties de rayon, et comme

$$T = \pi\sqrt{\frac{A}{M}}, \qquad \sqrt{\frac{A}{M}} = \frac{0{,}2}{T} = 0{,}003662$$

pour un balancier effectuant 18000 oscillations par heure.

$$\left.\begin{array}{r} \log. \sqrt{\dfrac{A}{M}} = \bar{2},8038803 \\ \log. \text{arc cos } 83^{\circ}\ 37'\ 14'',21 = 0,1641907 \end{array}\right| +$$

$$\log.\ t_1 = \bar{2},9680710$$

$$t_1 = 0,09291183$$

On a d'autre part

$$T = \pi \sqrt{\frac{A}{M}}$$

d'où

$$\frac{T^2}{\pi^2} = \frac{A}{M}.$$

Si

$$A = 0,004,$$

$$M = \frac{\pi^2}{T^2} \times 0,004 = \frac{\pi^2}{0,04} \times 0,004 = 0,1 = 0,98696$$

$$\left.\begin{array}{r} M = 0,98696 \\ K = 0,002 \end{array}\right| +$$

$$M + K = 0,98896$$

$$\left.\begin{array}{r} \log.\ A = \bar{3},6020600 \\ \log.\ M + K = \bar{1},9951787 \end{array}\right| -$$

$$\bar{3},6068813$$

$$\log. \sqrt{\frac{A}{M+K}} = \bar{2},8034406$$

Calculons

$$\text{arc sin } \alpha_1 \sqrt{\frac{M+K}{M\alpha_0^2 + K\alpha_1^2}} = \text{arc sin } \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \sqrt{\frac{1 + \dfrac{K}{M}}{1 + \dfrac{K}{M} \cdot \dfrac{\alpha_1^2}{\alpha_0^2}}}.$$

$$\frac{K}{M} = 0,0020264$$

$$\frac{K}{M} \cdot \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)^2 = 0,000025017$$

$$1 + \frac{K}{M}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)^2 = 1,000025017$$

$$\left.\begin{array}{r} \log. \left(1 + \dfrac{K}{M}\right) = 0,00008792 \\ \log. \left(1 + \dfrac{K}{M}\left(\dfrac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)^2\right) = 0,0000109 \end{array}\right| -$$

$$\log.\ \frac{1+\frac{K}{M}}{1+\frac{K}{M}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)^2} = 0{,}0008683$$

$$\left.\begin{array}{r}\log.\ \sqrt{\dfrac{1+\frac{K}{M}}{1+\frac{K}{M}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)^2}} = 0{,}0004341 \\ \log.\ \dfrac{\alpha_1}{\alpha_0} = \bar{1}{,}0457575\end{array}\right| +$$

$$\log.\ \frac{\alpha_1}{\alpha_0}\sqrt{\frac{1+\frac{K}{M}}{1+\frac{K}{M}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)^2}} = \bar{1}{,}0461916 =$$

$$\log.\sin\left(\text{arc}\ \sin\ \frac{\alpha_1}{\alpha_0}\sqrt{\frac{1+\frac{K}{M}}{1+\frac{K}{M}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)^2}}\right)$$

arc correspondant $= 6^0\ 23'\ 8'',7 = 0{,}1114524$

$$\left.\begin{array}{r}\log.\ 0{,}1114524 = \bar{1}{,}0470894 \\ \log.\ \sqrt{\dfrac{A}{M+K}} = \bar{2}{,}8034406\end{array}\right| +$$

$$\log.\ t_2 = \bar{3}{,}8505300 \qquad t_2 = 0^s{,}00708810.$$

$$t_1 = 0^s{,}09291183$$
$$t_2 = 0^s{,}00708810$$
$$t_1 + t_2 = 0{,}09999993.$$

La durée d'une demi-oscillation pour une montre dont le balancier effectue 18 000 oscillations à l'heure doit être de $0^s,1$. La différence est donc ici

$$0^s{,}1 - (t_1 + t_2) = 0^s{,}00000007.$$

En 24 heures, il y a 864 000 demi-oscillations ; la différence sera donc pour ce temps de

$$0^s{,}06.$$

On voit qu'elle est excessivement petite. *L'excentricité du*

centre de gravité de l'ancre et de la fourchette, assez considérable dans notre cas, n'a qu'une très faible influence sur la durée des oscillations.

Pour diminuer le moment d'inertie A du système, il sera bon de prendre un contrepoids de la fourchette plutôt léger. Cette précaution supprimera aussi les vibrations nuisibles.

773. — On peut maintenant examiner le cas dans lequel les oscillations deviennent plus petites que dans celui que nous venons d'examiner.

Prenons par exemple

$$\alpha_0 = 90^{\circ}.$$

Alors

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9} = 0{,}222......$$

$$\text{arc cos}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right) = 77^{\circ}\,9'\,37'',47. = 1{,}3467032$$

parties de rayons.

En effectuant les mêmes calculs que précédemment sur ces bases, on trouverait

$$\left.\begin{array}{r} t_1 = 0^s{,}0857383 \\ t_2 = 0^s{,}0142657 \\ \hline t_1 + t_2 = \ 0{,}1000040 \end{array}\right| +$$

$$0{,}1 - 0{,}100004 = -\,0^s{,}000004.$$

Pour 24 heures il y aura donc un retard de $3^s{,}41$ environ. On voit ainsi que l'influence d'une excentricité du centre de gravité de l'ancre est variable avec l'amplitude des oscillations.

Extrait du Mémoire sur le Spiral réglant

de Ed. Phillips (Paris 1861).

774. — Le spiral et le balancier étant dans leur position naturelle et en équilibre, on suppose que l'on fasse décrire au balancier un angle α. On demande quel est le moment du couple qu'il faudrait appliquer au balancier pour le maintenir

dans cette nouvelle position en s'opposant à l'action du spiral.

Pour résoudre le problème, rapportons le système à deux axes coordonnés rectangulaires ayant leur intersection sur l'axe du balancier et dont l'axe Oy passe par l'extrémité fixe du spiral.

Si, dans la nouvelle position d'équilibre, nous considérons le balancier et le spiral comme formant un tout solide, le système devra se maintenir en équilibre sous l'action du couple de moment G à déterminer. De plus, le centre du balancier étant fixe, rien n'empêche de le considérer comme libre, pourvu que nous appliquions en O une force égale et de signe contraire à la pression qu'il exerce sur son support. Soient Y et X les composantes, suivant Ox et Oy, de cette force. B étant la position d'un point quelconque du spiral dans le nouvel état d'équilibre, appelons x_1 et y_1 ses nouvelles coordonnées, s la longueur du spiral, comprise entre ce point et l'extrémité fixe, L la longueur totale du spiral, M son moment d'élasticité, r son rayon de courbure en B après la déformation, r_0 ce même rayon avant la déformation quand le moment d'élasticité est nul.

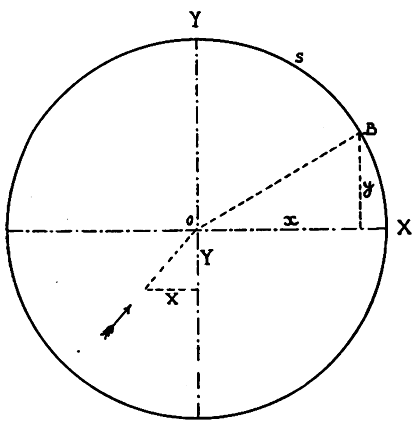


Fig. 245.

Le nouvel état d'équilibre que nous considérons actuellement ne sera pas modifié si l'on solidifie toute la partie du spiral comprise entre le point B et l'extrémité engagée dans le balancier; nous aurons ainsi à considérer les conditions d'équilibre d'un corps solide soumis, d'une part au couple G agissant sur le balancier et aux forces X_1 Y_1, d'autre part aux actions moléculaires exercées sur la section en B par la partie non solidifiée du spiral, dont le moment résultant est K.

Si l'on transporte en B les forces Y et X ainsi que le couple G, le couple résultant doit faire équilibre à celui qui provient des actions moléculaires. Or, si par exemple la variation de α est telle que le rayon de courbure a diminué en B, le moment des actions moléculaires est égal au couple — K. Le moment résultant des forces Y et X et

$$Yx - Xy\ ;$$

pour l'équilibre, la somme des moments doit être nulle : on aura donc

$$G + Yx - Xy - K = 0,$$

d'où

$$K = G + Yx - Xy.$$

Dans la fig. 246, le couple K est représenté par $(p_1 - p)$ et

$$-K = -p\,c\,d.$$

Comme nous avons, d'autre part,

$$\frac{M\alpha}{L} = K,$$

d'après les théories précédemment exposées il vient :

$$M\alpha = G + Yx - Xy.$$

Supposons que

$$Yx - Xy = 0:$$

c'est la supposition de Phillips. Alors

$$M\alpha = G.$$

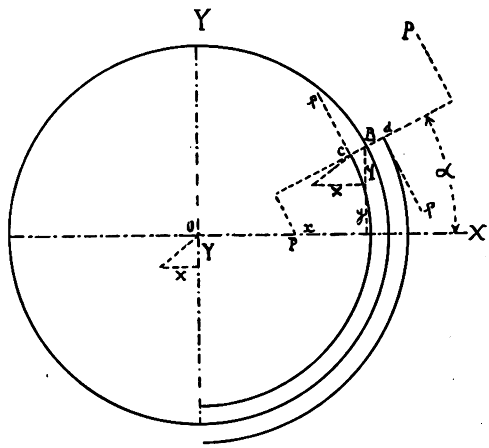


Fig. 246.

C'est ce cas que nous avons considéré aussi. Nous avons calculé alors la vitesse angulaire du mouvement et la durée d'oscillation. Il reste à savoir à quelles conditions on peut poser

$$Yx - Xy = 0.$$

C'est ce que Phillips a recherché dans son mémoire, que

nous allons résumer. Les calculs qui vont suivre, conduisent, nous le savons déjà, à la notion des courbes terminales.

Soient Ox, Oy les axes déterminés comme nous l'avons dit ; l'axe Oy est conduit par le bout fixe A de la courbe A B C, de manière que ce point A soit sur la partie négative de Oy.

Soit $BI = r$ le rayon de courbure en B, $r + dr$ celui au point infiniment voisin D (fig. 247).

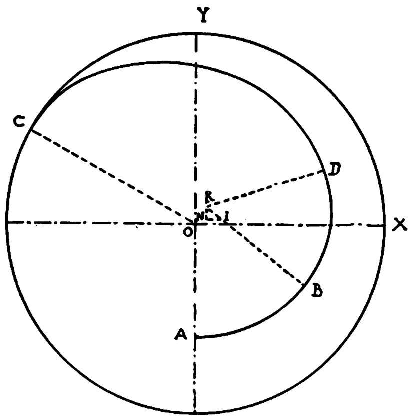


Fig. 247.

Alors

$$dr = IK.$$

Le triangle I K N va nous être utile. Si ξ et η sont les coordonnées du centre de courbure, il est clair que

$$(1) \qquad \begin{cases} IN = -d\xi \\ KN = d\eta. \end{cases}$$

D'ailleurs la déformation a lieu suivant la loi

$$(2) \qquad \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{\alpha}{L}.$$

Appelons θ l'angle formé par le rayon de courbure KB avec la partie négative de l'axe des y, et θ_0 ce même angle avant la déformation. Si l'on intègre l'équation (2) par rapport à ds, il vient

$$\int_0^s \frac{ds}{r} = \int_0^s \frac{ds}{r_0} + \frac{\alpha s}{L},$$

ou

$$(3) \qquad \theta = \theta_0 + \frac{\alpha}{L} s.$$

Cette formule nous montre suivant quelle loi varie l'inclinaison de la tangente à la courbe pendant la déformation. Dans le triangle I K N on a encore

$$-d\xi = IK \sin (IKN) = dr \sin \theta,$$

ou, en se servant des valeurs (2) et (3)

$$(4)\begin{cases} d\xi = -\sin\left(\theta_0 + \frac{ds}{L}\right) d\left\{\frac{r_0}{1+\frac{\alpha}{L}r_0}\right\}; \\ \text{on obtient de même :} \\ d\eta = \cos\left(\theta_0 + \frac{ds}{L}\right) d\left\{\frac{r_0}{1+\frac{\alpha}{L}r_0}\right\}. \end{cases}$$

Ce sont les équations différentielles de la développée de la courbe ABC, c'est-à-dire du lieu des centres de courbure de ses points.

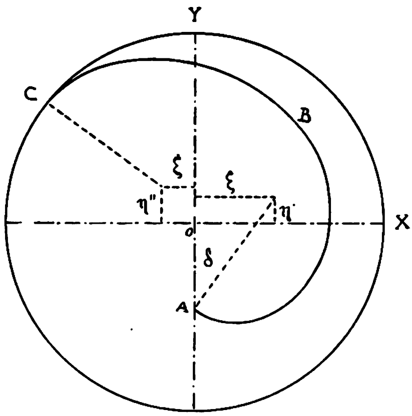


Fig. 248.

Soient, pendant la déformation, ξ' et η' les coordonnées du centre de courbure au point A, à la distance OA $= \delta$ de O, et ξ'' et η'' celles du centre de courbure au point B dans les mêmes conditions. La normale en A ayant une direction invariable, on aura :

$$\begin{cases} \xi' = -r' \sin \theta_0{}' = -\frac{r_0{}'}{1+\frac{\alpha}{L}r_0{}'} \sin \theta_0{}' \\ \eta' = -\delta + r' \cos \theta_0{}' = -\delta + \frac{r_0{}'}{1+\frac{\alpha}{L}r_0{}'} \cos \theta_0{}' \end{cases}$$

Il est bien évident alors que le centre de courbure en C aura pour coordonnées :

$$\begin{cases} \xi'' = \xi' + \int_{(ABC)} d\xi \\ \eta'' = \eta' + \int_{(ABC)} d\eta, \end{cases}$$

ou, en remplaçant les lettres par leurs valeurs :

$$(5)\left\{\begin{aligned}\xi'' &= -\frac{r_0'}{1+\frac{a}{L}r_0'}\sin\theta_0' - \int_{(ABC)}\sin\left(\theta_0' + \frac{as}{L}\right) d\left\{\frac{r_0}{1+\frac{a}{L}r_0}\right\}\\ \eta'' &= -\delta + \frac{r_0'}{1+\frac{a}{L}r_0'}\cos\theta_0' + \int_{(ABC)}\cos\left(\theta_0' + \frac{as}{L}\right) d\left\{\frac{r_0}{1+\frac{a}{L}r_0}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Soient ξ''' et η''' les coordonnées du centre des spires du spiral déformé. En général ce centre est différent de celui, b, du point C de la courbe terminale. Ces deux centres et le point c forment un triangle rectangle $a\,b\,c$ de dimensions finies, qui donne

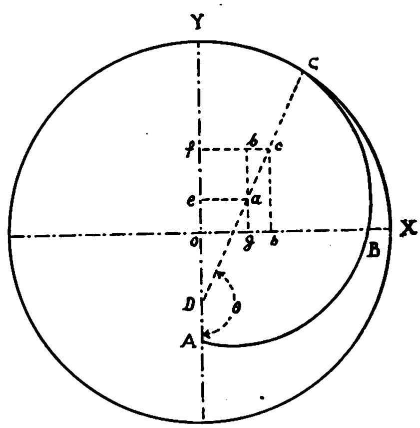


Fig. 249.

$$ac = \rho - r,$$

ρ étant ce que devient ρ_0 par la déformation;

$$bc = (\rho - r)\sin\theta'',$$
$$ab = (\rho - r)\cos\theta'';$$

dès lors

$$OG = \xi''' = \xi'' - (\rho - r)\sin\theta'',$$
$$Oc = \eta''' = \eta'' + (\rho - r)\cos\theta'',$$

où

$$\theta'' = \measuredangle\, CDA.$$

En tenant compte des équations (5) (2) et (3) :

$$(7)\left\{\begin{aligned}\xi''' = &-\frac{r_0'}{1+\frac{a}{L}r_0'}\sin\theta_0' + \frac{r_0''}{1+\frac{a}{L}r_0''}\sin\left(\theta_0'' + \frac{al}{L}\right) -\\ &-\frac{\rho_0}{1+\frac{a}{L}\rho_0}\sin\left(\theta_0'' + \frac{al}{L}\right) - \int\sin\left(\theta_0 + \frac{s}{L}\right) d\left\{\frac{r_0}{1+\frac{a}{L}r_0}\right\}\\ \eta''' = &-\delta + \frac{r_0'}{1+\frac{a}{L}r_0'}\cos\theta_0' - \frac{r_0''}{1+\frac{a}{L}r_0''}\cos\left(\theta_0'' + \frac{al}{L}\right) +\\ &+\frac{\rho_0}{1+\frac{a}{L}\rho_0}\cos\left(\theta_0'' + \frac{al}{L}\right) + \int\cos\left(\theta_0 + \frac{as}{L}\right) d\left\{\frac{r_0}{1+\frac{a}{L}r_0}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Or, l'intégration par parties donne :

$$\int_A^C \sin\left(\theta_0 + \frac{as}{L}\right) d\left\{\frac{r_0}{1+\frac{\alpha}{L}r_0}\right\} = \sin\left(\theta_0 + \frac{as}{L}\right)\frac{r_0}{1+\frac{\alpha}{L}r_0} -$$

$$-\int \frac{r_0}{1+\frac{\alpha}{L}r_0}\, d\left\{\sin\left(\theta_0+\frac{as}{L}\right)\right\} =$$

$$= \sin\left({\theta_0}'' + \frac{al}{L}\right)\frac{{r_0}''}{1+\frac{\alpha}{L}r''_0} - \frac{{r_0}'}{1+\frac{\alpha}{L}{r_0}'}\sin {\theta_0}' -$$

$$-\int_A^C \frac{r_0}{1+\frac{\alpha}{L}r_0}\, d\left\{\sin\left(\theta_0+\frac{as}{L}\right)\right\}.$$

Or

$$\int_A^C \frac{r_0}{1+\frac{\alpha}{L}r_0}\, d\left\{\sin\left(\theta_0+\frac{as}{L}\right)\right\} = \int_A^C r_0 \cos\left(\theta_0+\frac{as}{L}\right) d\theta_0 =$$

$$= \int_0^l \cos\left(\theta_0 + \frac{as}{L}\right) ds,$$

car

$$r_0\, d\theta_0 = ds;$$

donc

$$\int_A^C \sin\left(\theta_0+\frac{as}{L}\right) d\left\{\frac{r_0}{1+\frac{\alpha}{L}r_0}\right\} = \sin\left(\theta''_0 + \frac{al}{L}\right)\frac{r''_0}{1+\frac{\alpha}{L}r''_0} -$$

$$-\frac{r'_0}{1+\frac{\alpha}{L}{r_0}'}\sin {\theta_0}' - \int_0^l \cos\left(\theta_0+\frac{as}{L}\right) ds,$$

ce qui, substitué dans la première (7), donne

$$(8) \qquad \xi''' = -\frac{\rho_0}{1+\frac{\alpha}{L}\rho_0}\sin\left({\theta_0}''+\frac{al}{L}\right) + \int_0^l \cos\left(\theta_0+\frac{as}{L}\right) ds.$$

On transformerait d'une façon toute semblable la deuxième équation (7), qui devient

$$(8) \quad \eta''' = -\delta + \frac{\rho_0}{1+\frac{\alpha}{L}\rho_0} \cos\left(\theta_0'' + \frac{\alpha l}{L}\right) + \int_0^l \sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds.$$

Pour que la position du centre des spires demeure invariable, il faut et il suffit que ξ''' et η''' soient nulles pour toutes les valeurs de α comprises entre les limites des oscillations ; cette condition s'exprimera par les équations :

$$(9) \left\{ \begin{aligned} &\int_0^l \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds = \frac{\rho_0}{1+\frac{\alpha}{L}\rho_0} \sin\left(\theta_0'' + \frac{\alpha l}{L}\right) \\ &\text{et} \\ &\int_0^l \sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds = \delta - \frac{\rho_0}{1+\frac{\alpha}{L}\rho_0} \cos\left(\theta_0'' + \frac{\alpha l}{L}\right) \end{aligned} \right.$$

Ces équations déterminent par conséquent la forme de la courbe A B C, terminale du spiral. Si ces courbes y satisfont, le développement du spiral est concentrique.

Le cercle ne convient point, puisque, pour cette courbe, on a constamment

$$r_0 \, \theta_0 = s,$$

r_0 étant la valeur du rayon, il vient :

$$(10) \left\{ \begin{aligned} &\int_0^l \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds = \frac{r_0}{1+\frac{\alpha}{L} r_0} \sin\left(\theta_0'' + \frac{\alpha l}{L}\right) \\ &\text{et} \\ &\int_0^l \sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds = \frac{r_0}{1+\frac{\alpha}{L} r_0} - \frac{r_0}{1+\frac{\alpha}{L} r_0} \cos\left(\theta_0'' + \frac{\alpha l}{L}\right). \end{aligned} \right.$$

Ces relations (10) deviendraient les relations (9), ou, autrement dit, le cercle serait une courbe terminale si

$$r_0 = \rho_0$$

et

$$\frac{r_0}{1+\frac{\alpha}{L} r_0} = \text{const.} = \delta,$$

ce qui est impossible, puisque $\dfrac{r_0}{1+\frac{\alpha}{L} r_0}$ varie avec α. Le cercle ne peut donc servir de courbe terminale.

C'est ce que confirme l'exemple des anciens chronomètres munis de courbes terminales en forme d'arcs de cercle.

Remarquons que les arcs $\frac{as}{L}$ et $\frac{al}{L}$ sont toujours petits. On pourra par conséquent remplacer leur sinus par l'arc et leur cosinus par l'unité. Pour la même raison on pourra remplacer $\frac{1}{1+\frac{\alpha}{L}\rho_0}$ par $1-\frac{\alpha\rho_0}{L}$. Les conditions (9) s'écrivent alors :

$$(11)\quad \begin{cases} \int_0^l \left(\cos\theta_0 - \frac{as}{L}\sin\theta_0\right) ds = \rho_0\left(1-\frac{\alpha\rho_0}{L}\right)\left(\sin\theta_0'' + \frac{al}{L}\cos\theta_0''\right) \\ \int_0^l \left(\sin\theta_0 + \frac{as}{L}\cos\theta_0\right) ds = \delta - \rho_0\left(1-\frac{\alpha\rho_0}{L}\right)\left(\cos\theta_0'' - \frac{al}{L}\sin\theta_0''\right). \end{cases}$$

Nous négligerons dans le développement les termes contenant α^2, car α est très petit. Nous égalerons entre eux, dans les deux membres, les termes contenant α et ceux qui ne le contiennent pas. Nous obtenons ainsi les quatre relations :

$$(12)\qquad \int_0^l \cos\theta_0 .\, ds = \rho_0 \sin\theta_0''$$

$$(13)\qquad \int_0^l \sin\theta_0 .\, ds = \delta - \rho_0 \cos\theta_0''$$

pour la première, et

$$(14)\qquad -\int_0^l s \sin\theta_0\, ds = -\rho_0^2 \sin\theta_0'' + \rho_0 l \cos\theta_0''$$

$$(15)\qquad \int_0^l s \cos\theta_0\, ds = \rho_0^2 \cos\theta_0'' + \rho_0 l \sin\theta_0''$$

pour la seconde.

(12) et (13) expriment que, dans la position non déformée, le centre des spires doit se trouver sur l'axe du balancier, ce qui est évident à priori.

Car, si x et y sont les coordonnées d'un point quelconque de la courbe extrême non déformée, il vient

$$ds \cos\theta = dx$$

et

$$ds \sin \theta = dy.$$

Si donc le centre primitif O des spires est au centre du balancier,

$$\int_0^l \cos \theta_0 \, ds = \int_0^l dx = \rho_0 \sin \theta''_0,$$

$$\int_0 \sin \theta_0 \, ds = \int_0^l dy = \delta - \rho_0 \cos \theta''_0.$$

Les équations (12) et (13) sont identiques à celles-ci ; elles sont donc satisfaites. Examinons maintenant les équations (14) et (15) ; en intégrant par parties, il vient :

$$(16) \qquad \begin{cases} \int s \sin \theta_0 \, ds = \int s \, dy = sy - \int y \, ds \\ \int s \cos \theta_0 \, ds = \int s \, dx = sx - \int x \, ds. \end{cases}$$

Si nous intégrons entre les limites 0 et l, nous aurons :

$$\int_0^l y \, ds = l y_1$$

$$\int_0^l x \, ds = l x_1,$$

(x_1 y_1) étant les coordonnées du centre de gravité de la courbe A B C non déformée ; les équations (16) deviennent :

$$\int_0^l s \sin \theta_0 \, ds = - \rho_0 \, l \cos \theta_0'' - l y_1$$

$$\int_0^l s \sin \theta_0 \, ds = \rho_0 \, l \sin \theta_0'' - l x_1$$

Dès lors les équations (14) et (15) s'écriront :

$$\rho_0 \, l \cos \theta_0'' + l y_1 = - \rho_0^2 \sin \theta_0'' + \rho_0 \, l \cos \theta_0'',$$

d'où

$$(17) \qquad \begin{cases} l y_1 = - \rho_0^2 \sin \theta_0'', \\ \quad \text{d'où} \\ y_1 = - \dfrac{\rho_0^2}{l} \sin \theta_0'' \end{cases}$$

et

$$\rho_0\, l \sin \theta''_0 - l x_1 = \rho_0^2 \cos \theta''_0 + \rho_0\, l \sin \theta''_0$$

ou

$$(18) \qquad \begin{cases} - l x_1 = \rho_0^2 \cos \theta_0'', \\ \quad \text{d'où} \\ x_1 = - \dfrac{\rho_0^2}{l} \cos \theta_0''. \end{cases}$$

Telles sont les coordonnées du centre de gravité de la courbe terminale. On peut les écrire autrement, afin d'en rendre l'expression plus pratique.

Soit G le centre de gravité (fig. 250) de la courbe ABC non déformée. En divisant (17) et (18) l'une par l'autre, il vient

$$\frac{y_1}{x_1} = \text{tg.}\ \theta''_0 = \text{tg GOX};$$

mais

$$\theta''_0 = 180^\circ + \text{COY},$$

donc

$$(19) \qquad \begin{matrix} \text{tg GOX} = \text{tg COY} \\ \text{GOX} = \text{COY}. \end{matrix}$$

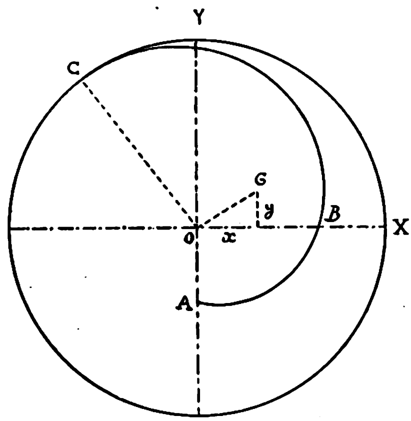


Fig. 250.

Mais, comme OX est perpendiculaire sur OY, il faut nécessairement que OY soit perpendiculaire sur OC. C'est une première conclusion.

Si ensuite on élève (17) et (18) au carré et qu'on les additionne membre à membre, il vient :

$$y_1^2 + x_1^2 = \overline{O}G^2 = \left(\frac{\rho_0^2}{l}\right)^2$$

ou

$$(20) \qquad \text{OG} = \frac{\rho_0^2}{l};$$

c'est la deuxième condition.

On peut les énoncer comme suit.

1) La courbe terminale doit être telle que son centre de gravité soit situé sur la perpendiculaire menée par le centre

des spires au rayon aboutissant à son point de contact avec les spires.

2) La distance de ce centre de gravité au centre des spires doit être égale à $\frac{\rho_0^2}{l}$, soit une troisième proportionnelle entre la longueur de la courbe et le rayon des spires.

D'ailleurs l'équation (20) donne

$$\rho_0^2 = l.\ \mathrm{OG} = \int_0^l y\ ds$$

par définition, ce qui indique que le moment de la courbe terminale par rapport à Ox doit être égal à ρ_0^2.

Ce sont là les deux conditions Phillips.

Si donc ces conditions sont vérifiées, le centre de gravité de tout le spiral non déformé se trouvera sur l'axe du balancier.

775. — Il s'agit encore de montrer que, pendant la déformation, ce centre de gravité ne s'éloigne que très peu de l'axe du balancier, quel que soit l'angle de rotation du balancier. Soit α l'angle décrit par le balancier à partir de sa position de repos. Soit A B C la position déformée de l'une des courbes terminales.

Posons $\mathrm{COC}' = \beta'$ et soit $\mathrm{X''OX'}$, la bissectrice de cet angle, prenons cette droite comme axe des x', et une perpendiculaire $\mathrm{OY'}$ en O sur cette droite comme axe des y'.

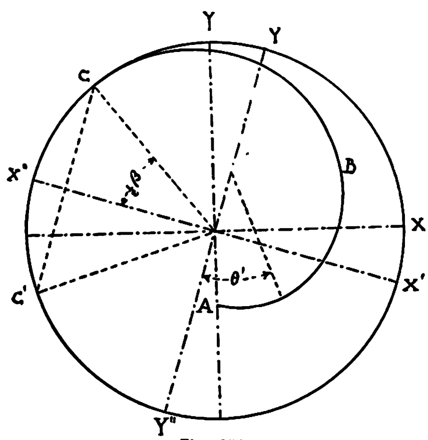


Fig. 251.

Le spiral compte toujours un nombre entier de spires circulaires commençant et finissant en C′ et dont le centre de gravité se trouve en O, plus une seconde partie comprenant l'arc de cercle C X″ C′ et les deux courbes terminales. Il faut montrer que le centre

de gravité de cette seconde partie est lui-même en O, quel que soit l'angle α.

Le centre de gravité de l'arc de cercle $CX''C'$ est sur OX'', comme aussi celui des deux courbes extrêmes, qui sont symétriques par rapport à OX''. Il suffira donc de montrer que le moment statique de CX'' par rapport à YOY'' est égal à celui de ABC.

Soit m le moment de CX'', ρ le rayon des spires déformées ; il vient

$$m = \rho^2 \sin \frac{\beta'}{2}.$$

Pour ABC, on aura le moment

$$m' = \int_0^l x'\, ds = -\rho l \cos \frac{\beta'}{2} - \int_0^l s \cos \theta'.\, ds,$$

si $dx' = ds \cos \theta'$, où θ' est l'angle avec OY'' de la normale en un point de la courbe ABC.

Mais

$$\theta' = \theta + AOY'' = \theta_0 + \frac{as}{L} + YO'Y ;$$

de plus

$$YOY' = X'OY' - YOC - COX'',$$

ou encore

$$YOY' = \frac{\pi}{2} - \left(\theta''_0 + \frac{al}{L} - \pi\right) - \frac{\beta'}{2} = \frac{3}{2}\pi - \theta''_0 - \frac{al}{L} - \frac{\beta'}{2}.$$

Donc

$$\theta' = \frac{3\pi}{2} + \theta_0 + \frac{as}{L} - \theta''_0 - \frac{al}{L} - \frac{\beta'}{2}$$

et

$$\cos \theta' = \sin \left(\theta_0 + \frac{as}{L} - \theta''_0 - \frac{al}{L} - \frac{\beta'}{2}\right).$$

Par conséquent

$$(21) \qquad m' = \int_0^l x'\, ds = -\rho l \cos \frac{\beta'}{2} - \cos\left(\theta''_0 + \frac{al}{L} + \frac{\beta'}{2}\right) \times$$
$$\int_0^l s \sin\left(\theta_0 + \frac{as}{L}\right) ds + \sin\left(\theta''_0 + \frac{al}{L} + \frac{\beta'}{2}\right)\int_0^l s \cos\left(\theta_0 + \frac{as}{L}\right) ds.$$

Dérivons par rapport à α les expressions (9), en remarquant que nous supposons immobile le centre des spires, quel que soit α. On obtient :

$$(22)\begin{cases} \displaystyle\int_0^l s \sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds = -\frac{\rho_0 \, l}{1 + \frac{\alpha \rho_0}{L}} \cos\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}\right) + \frac{\rho_0^2}{\left(1 + \frac{\alpha\rho_0}{L}\right)^2} \sin\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}\right) \\ \displaystyle\int_0^l s \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) ds = \frac{\rho_0 \, l}{1 + \frac{\alpha \rho_0}{L}} \sin\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}\right) + \frac{\rho_0^2}{\left(1 + \frac{\alpha\rho_0}{L}\right)^2} \cos\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}\right) \end{cases}$$

Transportons ces valeurs dans l'équation (21) en y faisant encore $\rho = \dfrac{\rho_0}{1 + \frac{\alpha \rho_0}{L}}$; on aura :

$$m' = \int_0^l x' \, ds = -\frac{\rho_0}{1 + \frac{\alpha\rho_0}{L}} \cos\frac{\beta'}{2} + \cos\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L} + \frac{\beta'}{2}\right) \frac{\rho_0 l}{1 + \frac{\alpha \rho_0}{L}} \cos\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}\right)$$

$$- \cos\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L} + \frac{\beta'}{2}\right) \frac{\rho_0^2}{\left(1 + \frac{\alpha\rho_0}{L}\right)^2} \sin\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}\right) +$$

$$+ \sin\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L} + \frac{\beta'}{2}\right) \frac{\rho_0 l}{1 + \frac{\alpha\rho_0}{L}} \sin\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}\right) +$$

$$+ \sin\left(\theta''_0 + \frac{\alpha}{L} l + \frac{\beta'}{2}\right) \frac{\rho_0^2}{\left(1 + \frac{\alpha\rho_0}{L}\right)^2} \cos\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}\right),$$

ou

$$\int_0^l x' \, ds = \frac{\rho_0 l}{1 + \frac{\alpha\rho_0}{L}} \left[\cos\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L} + \frac{\beta'}{2}\right) \cos\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}\right) + \sin\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L} + \frac{\beta'}{2}\right) \sin\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}\right)\right]$$

$$- \frac{\rho_0^2}{\left(1 + \frac{\alpha\rho_0}{L}\right)^2} \left[\cos\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L} + \frac{\beta'}{2}\right) \sin\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}\right) - \right.$$

$$\left. - \sin\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L} + \frac{\beta'}{2}\right) \cos\left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L}\right)\right] - \frac{\rho_0}{1 + \frac{\alpha\rho_0}{L}} \cos\frac{\beta'}{2} ;$$

comme

$$\cos\left(\theta''_0 + \frac{al}{L} + \frac{\beta'}{2}\right) = \cos\left(\theta''_0 + \frac{al}{L}\right)\cos\frac{\beta'}{2} - \sin\left(\theta''_0 + \frac{al}{L}\right)\sin\frac{\beta'}{2}$$

et

$$\sin\left(\theta''_0 + \frac{al}{L} + \frac{\beta'}{2}\right) = \sin\left(\theta''_0 + \frac{al}{L}\right)\cos\frac{\beta'}{2} + \cos\left(\theta''_0 + \frac{al}{L}\right)\sin\frac{\beta'}{2},$$

il vient :

$$\int_0^l x'ds = \frac{\rho_0 l}{1+\frac{a}{L}\rho_0}\left[\cos^2\left(\theta''_0 + \frac{al}{L}\right)\sin\frac{\beta'}{2} - \sin\left(\theta''_0 + \frac{al}{L}\right)\sin\frac{\beta'}{2}\cos\left(\theta''_0 + \frac{al}{L}\right) + \right.$$

$$\left. + \sin^2\left(\theta''_0 + \frac{al}{L}\right)\cos\frac{\beta'}{2} + \sin\left(\theta''_0 + \frac{al}{L}\right)\sin\frac{\beta'}{2}\cos\left(\theta''_0 + \frac{al}{L}\right)\right]$$

$$- \frac{\rho_0^2}{\left(1+\frac{a}{L}\rho_0\right)^2}\left[\cos\left(\theta''_0 + \frac{al}{L}\right)\cos\frac{\beta'}{2}\sin\left(\theta''_0 + \frac{al}{L}\right) - \sin^2\left(\theta''_0 + \frac{al}{L}\right)\sin\frac{\beta'}{2} - \right.$$

$$\left. - \cos\left(\theta''_0 + \frac{al}{L}\right)\cos\frac{\beta'}{2}\sin\left(\theta''_0 + \frac{al}{L}\right) - \cos^2\left(\theta''_0 + \frac{al}{L}\right)\sin\frac{\beta'}{2}\right] - \frac{\rho_0}{1+\frac{a\rho_0}{L}}\cdot\cos\frac{\beta'}{2},$$

c'est-à-dire après simplification et puisque $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$:

$$m' = \int_0^l x'\,ds = \frac{\rho_0^2}{\left(1+\frac{al}{L}\right)^2}\sin\frac{\beta'}{2} = \rho^2\sin\frac{\beta'}{2}.$$

Or ce second membre n'est autre chose que la valeur du moment m de CX'', c'est-à-dire qu'on a

$$m' = m.$$

C'est ce qu'il fallait établir.

Ainsi donc les courbes terminales déterminées selon les principes énoncés précédemment assurent l'isochronisme, puisqu'elles suppriment toute action sur l'axe du balancier et rendent immuable pendant la déformation le centre de gravité du spiral sur cet axe, et cela quelle que soit la situation relative des deux courbes extrêmes l'une au-dessus de l'autre.

Effet de la force centrifuge sur la durée des oscillations d'un balancier compensateur.

776. — La force centrifuge est exprimée par la relation

$$(1) \qquad C = \frac{mv^2}{r},$$

où m est la masse de la pièce soumise à cette force, v la vitesse linéaire de son déplacement et r sa distance au centre de rotation ; nous savons que

$$m = \frac{P}{g}$$

et, si ω est la vitesse angulaire,

$$v = r\omega \,;$$

dès lors

$$(2) \qquad C = \frac{P}{g} \cdot \omega^2 \, r.$$

Comme la vitesse angulaire est variable pendant une oscillation du balancier et qu'elle dépend en outre de l'amplitude, ω désigne une vitesse moyenne.

Si $2\alpha_0$ est l'amplitude du mouvement, T le temps employé à l'effectuer, on aura

$$\omega = \frac{2\alpha_0}{T};$$

alors

$$(3) \qquad C = \frac{P}{g} r_0 \left(\frac{2\,\alpha_0}{T}\right)^2.$$

Ainsi, pour le balancier d'un chronomètre de marine dont l'une des masses a un poids $P = 3$ gr., $r_0 = 15\ ^m/_m$ la distance de cette masse au centre du balancier, $\alpha_0 = \pi$, et $T = 0^s,25$, on a

$$C = 2,898 \text{ gr.},$$

tous calculs faits.

777. — Envisageons maintenant un cas particulier qui se présente souvent dans la pratique. La masse de poids P est

située sur la serge, à l'extrémité du rayon faisant un angle droit avec l'axe du bras. Que devient dans ces conditions le rayon r_0 pendant le mouvement ?

Soit O (fig. 252) le centre du balancier, A le point où la serge se détache du bras, AMB la ligne de séparation des lames métalliques dont se compose la serge, B le point de la serge où se trouve la masse *m*.

Soit M un point quelconque de la serge ; posons

$$AOM = \theta_0.$$

Le moment de la force centrifuge agissant en B par rapport au point M est

$$M = C \times Op$$

et, comme

$$Op = r_0 \cos \theta_0,$$

$$(3) \qquad M = C \times r_0 \cos \theta_0.$$

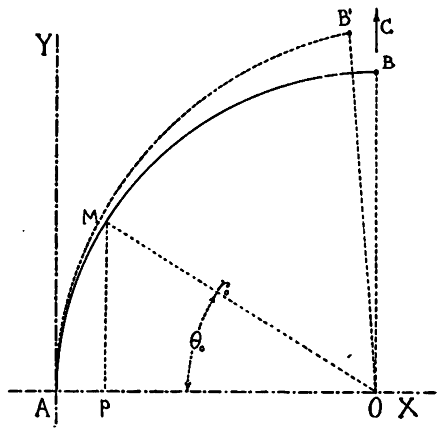


Fig. 252.

La théorie de la résistance des matériaux donne d'ailleurs la loi suivant laquelle le rayon r_0 varie sous l'influence de ce moment, savoir

$$(4) \qquad \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} = \frac{\mu}{EI},$$

I étant le moment d'inertie de la section droite de la serge, E son coefficient d'élasticité moyen, et μ le moment de flexion par rapport à cette section ; c'est donc ici M. On tire de (4)

$$1 - \frac{r_0}{r} = \frac{\mu}{EI} r_0,$$

ou

$$r - \frac{\mu}{EI} r_0 r = r_0$$

et

$$r\left(1 - \frac{\mu}{EI} r_0\right) = r_0,$$

d'où enfin

$$r = \frac{r_0}{1 - \frac{\mu}{EI} r_0},$$

ou, en remplaçant μ par sa valeur M (3),

$$(5) \qquad r = \frac{r_0}{1 - \frac{C r_0^2 \cos \theta}{EI}}.$$

D'ailleurs cette même équation (4) nous permet de déterminer suivant quelle loi varie l'angle θ_0. Multiplions (4) par ds et intégrons les deux membres de 0 a θ_0, il vient

$$\int_0^{\theta_0} \frac{ds}{r_0} - \int_0^{\theta} \frac{ds}{r} = \int_0^{\theta_0} \frac{C r_0 \cos \theta_0}{EI} ds$$

et, comme

$$r_0 \, d\theta_0 = r d\theta = ds,$$

il vient

$$\frac{ds}{r_0} = d\theta_0, \qquad \frac{ds}{r} = d\theta,$$

d'où

$$\int_0^{\theta_0} d\theta_0 - \int_0^{\theta} d\theta = \int_0^{\theta_0} \frac{C r_0 \cos \theta_0}{EI} r_0 \, d\theta_0,$$

d'où enfin

$$\theta_0 - \theta = \frac{C r_0^2}{EI} \sin \theta_0.$$

On tire de là

$$(6) \qquad \theta = \theta_0 - \frac{C r_0^2}{EI} \sin \theta_0.$$

Les équations (5) et (6) serviront à construire graphiquement l'éloignement des masses du point O dû à la force centrifuge.

A une échelle convenable, on dessinera la serge, qu'on divisera ensuite en parties égales; puis on calculera pour chacune d'elles, envisagée comme un arc de cercle, le rayon de courbure correspondant. On pourra alors mesurer la nou-

velle distance OB (fig. 252) dans la position déformée de la serge.

Pour un chronomètre de marine, on avait, dans les conditions précédentes,

$$C = 2{,}898 \text{ gr. };$$

La construction que nous venons d'indiquer, donnait, pour l'allongement du rayon r_0 au point B, la quantité

$$0{,}002 \ {}^{m}/_{m} \text{ environ,}$$

valeur un peu incertaine à cause de l'approximation limitée qui a été adoptée.

Le problème peut être soumis au calcul analytique. Les recherches de J. Grossmann sur ce point, n'étant pas complètes, pourront être plus tard l'objet d'une étude spéciale.

778. — Quelle est l'influence de cette variation du rayon r_0 sur la durée des oscillations du balancier?

La formule donnant le temps T de l'oscillation du balancier est

$$T = \pi\sqrt{\frac{A}{M}} = \pi\sqrt{\frac{mR^2}{M}}.$$

Si le rayon devient R_1, on a

$$T_1 = \pi\sqrt{\frac{A_1}{M}} = \pi\sqrt{\frac{mR_1^2}{M}},$$

d'où

$$\frac{T}{T_1} = \frac{R}{R_1};$$

c'est la relation que nous cherchons

Si $T = 86400$ secondes pour 24 heures, il vient si $R = 15$, $R_1 = 15{,}002$,

$$\frac{86400}{T_1} = \frac{15}{15{,}002},$$

d'où

$$T_1 = 86412 \text{ secondes.}$$

Il y a donc une augmentation de 12 secondes en 24 heures à condition que tous les points de la serge s'éloignent de O

de la même quantité sous l'influence de la force centrifuge, ce qui n'est certainement pas le cas en réalité.

C'est pourquoi, dans les calculs qui suivent, nous prendrons la valeur 7 secondes pour le retard produit par la force centrifuge sur la marche d'un chronomètre de marine dont le balancier effectue des oscillations d'une amplitude de 1 tour.

779. — Calculons

$$r = \frac{r_0}{1 - \frac{C\, r_0^2 \cos \theta_0}{E\,I}}.$$

Ici $I = \frac{1}{12} e^3 h$, où e est l'épaisseur et h la hauteur de la serge. Quant à E, sa valeur est incertaine à cause de la composition de la serge.

Nous prendrons 20000000 comme valeur du coefficient d'élasticité de l'acier à cause du recuit qu'il doit subir quand on lui ajoute le laiton. Le coefficient d'élasticité du laiton dépend de la manière dont il est martelé après la fonte ; nous prendrons 9000000 pour ce coefficient. S'il y a $\frac{2}{5} e$ d'acier et $\frac{3}{5} e$ de laiton,

$$E = \frac{2}{5} \times 20000000 + \frac{3}{5} \times 9000000 = 13400000 \;;$$

d'ailleurs $\frac{C\, r_0^2 \cos \theta_0}{E\,I}$ est très petit par rapport à 1 ; nous pouvons par suite écrire,

$$(7) \qquad r = r_0 + r_0 \frac{C\, r_0^2 \cos \theta_0}{E\,I}.$$

L'augmentation de r dépend donc de $C\, r_0^2$ et l'expression (2) nous montre que C est proportionnel au carré de l'amplitude. Soit 3 la valeur arrondie de C pour une amplitude de 1 tour. On pourra écrire :

Amplitude	*C*
1,5 tour	6,75
1,25 »	4,638
1 »	3
0,75 »	1,688
0,50	0,75.

Et, comme la durée d'une oscillation est proportionnelle à C, on aura aussi :

Amplitude en tours	Δ *T*
1,5	15,75 secondes
1,25	10,938 »
1	7
0,75	3,938
0,50	1,75
0,25	0,438.

La fig. 253 montre la variation ΔT en 24 heures de la durée d'oscillation en fonction de l'amplitude, cette dernière étant portée en abscisses et les retards en ordonnées. La force centrifuge produit donc un plus grand retard dans les grandes oscillations que dans les petites.

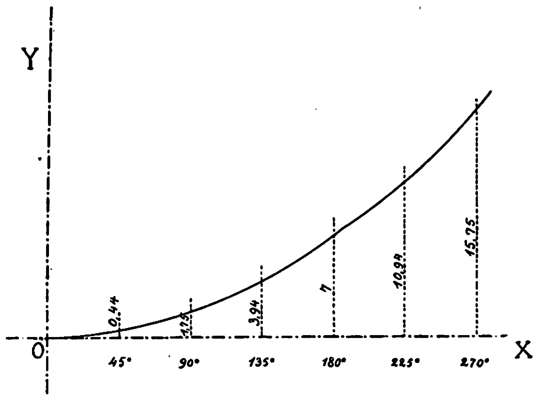


Fig. 253.

780. — Les anciens chronométriers avaient trouvé qu'un chronomètre neuf a de l'avance au commencement de son fonctionnement, mais que cette avance s'annulait au bout d'un certain temps, environ une année. Ils supposaient que la cause en était imputable à une augmentation de la force du spiral, ce qui évidemment est inexact, car on conçoit bien que le métal se relâche par l'effet de flexions répétées.

Il convient de remarquer qu'un ressort de barillet neuf se rend presque toujours dans les premiers temps de son fonctionnement. Si, en sortant des mains du fabricant, un ressort a cinq tours quand il repose librement sur une surface plane, il en aura peut-être huit après une année de service : il s'est donc rendu de trois tours et sa force a diminué en proportion. On observe d'ailleurs l'annulation de ce relâche-

ment de forme au bout de ce temps. Puisque la force a diminué, l'amplitude des oscillations diminue également, comme aussi la force centrifuge, et la montre avance.

Pour remédier à cet état de choses, on emploie tout d'abord une lame bimétallique dont les métaux constituants ont des épaisseurs e déterminées par la relation

$$\frac{e''}{e'} = \sqrt{\frac{E'}{E''}};$$

ce rapport est d'ailleurs égal à $\frac{^3/_5 \text{ laiton}}{^2/_5 \text{ acier}}$ et dépend de l'écrouissage du laiton. Si ce moyen ne suffit pas, on pourra, soit donner une plus grande épaisseur à la lame, soit déplacer les masses du côté du bras du balancier, tout en satisfaisant aux exigences de la compensation, car l'équation

$$r = r_0 + r_0 \frac{C\, r_0^2 \cos \theta_0}{E\, I}$$

nous montre qu'en augmentant I on diminue r, c'est-à-dire qu'on combat efficacement l'effet de la force centrifuge.

Un autre moyen d'y parvenir consiste à augmenter la hauteur h de la lame, ce qui influence peu la compensation. Dans le cas d'un chronomètre de marine, on pourrait augmenter la hauteur des lames depuis les bras jusque près des masses.

Cas d'un balancier compensé en laiton-acier-nickel.

781. — Examinons la question de savoir quelles sont les conditions requises pour que, toute autre chose pareille d'ailleurs, l'effet de la compensation soit identique pour deux lames différentes, l'une d'épaisseur e' en acier-nickel et laiton, l'autre d'épaisseur e en acier ordinaire et laiton.

Yvon Villarceau a donné la loi suivant laquelle le rayon de la serge varie en fonction de la température ; elle se formule ainsi :

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{3}{2e} (\gamma'' - \gamma')\, n,$$

ρ et ρ_0 étant les rayons normal et déformé sous l'influence d'une élévation de température de n degrés, γ'' le coefficient de dilatation calorifique du laiton, γ' celui de l'acier. Pour l'invar, on admet $\gamma' = 0$.

Si $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}$ ne doit pas varier de l'une des combinaisons de lames à l'autre, on pourra, pour une même élévation de température, égaler aussi les seconds membres. On a, en effet :

$$1) \text{ lame acier laiton } \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{3}{2e}(\gamma'' - \gamma')\, n,$$

$$2) \text{ lame invar-laiton } \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{3}{2e'}(\gamma'')\, n;$$

les premiers membres étant égaux par hypothèse, il vient :

$$\frac{3}{2e}(\gamma'' - \gamma')\, n = \frac{3}{2e'}\gamma''\, n,$$

c'est-à-dire

$$e'(\gamma'' - \gamma') = \gamma'' e,$$

d'où

$$e' = e\frac{\gamma''}{\gamma'' - \gamma'}.$$

Donc, si $\gamma'' = 0{,}00001875, \qquad \gamma' = 0{,}0000115,$

$$\gamma'' - \gamma' = 0{,}00000725,$$

$$\frac{\gamma''}{\gamma'' - \gamma'} = 2{,}58 \qquad e' = 2{,}58\, e.$$

Si nous introduisons cette valeur dans l'équation

$$(7) \qquad r = r_0 + r_0 \frac{C\, r_0^2 \cos \theta_0}{E \frac{1}{12} e^3 h},$$

le second terme du second membre devient 17,2 fois plus petit, ce qui réduit considérablement la variation ΔT de la durée d'oscillation d'amplitude variée. Ainsi, pour une amplitude de 1,5 tours, nous avions trouvé un retard de $15^s,75$; avec l'acier-nickel, ce retard se réduit à une fraction de seconde.

782. — Dans ce qui précède, nous avons spécialement

traité le cas d'un chronomètre de marine. Voyons ce qui arrivera dans le cas d'une montre de poche à balancier compensateur.

La forme du balancier d'un chronomètre de marine diffère de celle du balancier d'une montre de poche; c'est pourquoi nous ne pouvons pas supposer de rapport simple entre les rayons de ces deux balanciers. Refaisons donc le calcul de la force centrifuge, dans le cas du balancier d'une montre de 43 m/m, en admettant que

$$P = 0{,}18 \text{ gr.}, \qquad r = 8 \text{ m/m}, \qquad \alpha_0 = \pi, \qquad T = 0^s{,}2,$$
$$g = 980{,}665.$$

Alors, en appliquant ces données à l'expression de la force centrifuge

$$C = \frac{P}{g} \cdot r_0 \left(\frac{2\,\alpha_0}{T}\right)^2,$$

il vient

$$C = 0{,}1445.$$

Or, pour un chronomètre de marine, nous avions trouvé

$$C = 2{,}898.$$

La force centrifuge est donc, dans les conditions supposées, 20 fois moindre dans une montre ordinaire que dans un chronomètre de marine avec un balancier d'acier ordinaire et laiton.

783. — Calculons maintenant le rapport des variations du rayon de courbure d'un balancier de chronomètre de marine et d'une montre en nous basant sur le 2e terme du second membre de l'équation qui donne r :

$$(8) \qquad \frac{C\, r_0^2}{E \frac{1}{12} e^3\, h}.$$

où nous considérons $\frac{1}{12}$ E comme invariable.

Admettons les données suivantes.

784. — **Chronomètre de marine.**

Rayon du balancier $r_0 = 15$ m/m, $e = 1$, épaisseur de la serge, $h = 4{,}25$ hauteur de la serge, $C = 2{,}898$; alors le terme (8) s'écrit

$$(9) \qquad \frac{2{,}898.\ \overline{15}^2}{E.\ 1^3.\ 4{,}25}.$$

785. — **Montre.**

Rayon du balancier $r_0 = 8\ ^m/_m$ $\quad e = 0{,}53 \quad h = 1{,}38$; le terme (8) s'écrit

$$(10) \qquad \frac{0{,}1449.\ 8^2}{_{12}\, E.\ \overline{0{,}53}^3.\ 1{,}38}.$$

Le rapport de (9) à (10) est donc

$$\frac{\dfrac{2{,}898.\ \overline{15}^2}{1^3.\ 4{,}25}}{\dfrac{0{,}1449.\ 8^2}{\overline{0{,}53}^3.\ 1{,}38}} = \frac{4500 \times 0{,}1488 \times 1{,}38}{4{,}25 \times 64} = 3{,}397.$$

786. — Ainsi la variation du rayon de courbure de la serge est environ 3,4 fois plus petite dans une montre que dans un chronomètre de marine.

Nous pouvons admettre en première approximation que la variation ΔT de la durée des oscillations suit également cette loi; nous obtiendrons alors les valeurs de ΔT pour la montre en divisant par 3,4 celles que nous avions trouvées dans le cas du chronomètre, ce qui donne :

Pour la montre

Amplitude en nombre de tours	ΔT
1,5	4,63 secondes
1,25	3,21 »
1	2,05 »
0,75	1,15 »
0,5	0,51 »
0,25	0,13 »

Comme, d'ailleurs, dans le cas d'une montre à ancre, les frottements des pivots du balancier, en tenant compte des fonctions de l'échappement, produisent un retard, la force centrifuge pourra dans une certaine mesure servir à la compensation.

Si l'on répétait ce même calcul pour le balancier d'une

montre de dame ou d'une montre à répétition, c'est-à-dire pour une montre munie d'un petit balancier, les valeurs de ΔT diminueraient considérablement.

Exemple de calcul du moment d'inertie du balancier d'une montre de 44 mm. de diamètre.

787. — Cet exemple, malgré la longueur des calculs, est intéressant à plus d'un titre. Les méthodes qui y seront employées, pourront être facilement généralisées ou adaptées à des cas analogues.

Pour être rigoureux, il faut décomposer le balancier donné en plusieurs parties homogènes et de forme régulière : par exemple le bras, la serge, les vis, etc.

788. — **Moment d'inertie des vis.** — Un vis peut se décomposer en quatre parties de forme géométrique : la tête, la fente, la partie filetée et la partie conique de son extrémité.

789. — I. *La tête* a la forme d'un cylindre dont l'axe OZ est perpendiculaire à l'axe de rotation du balancier Oy.

Décomposons (fig. 254) le cylindre en tranches au moyen

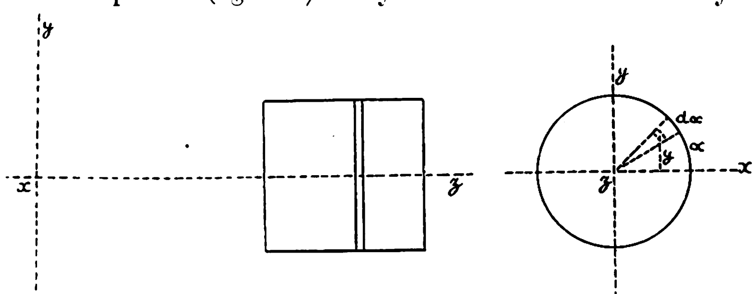


Fig. 254.

de plans perpendiculaires à OZ et soient z la distance de l'un de ces plans à l'origine O, et $z + dz$ celle d'un autre plan infiniment voisin. Nous décomposerons la tranche circulaire d'épaisseur dz en secteurs au moyen de plans passant par l'axe du cylindre. Soient a et $a + da$ les angles de deux de ces plans infiniment voisins avec Ox. Enfin découpons sur ces secteurs des éléments cylindriques dm limités aux plans

dont nous venons de parler et aux surfaces cylindriques ayant leur axe en OZ et de rayon ρ et $\rho + d\rho$.

Si D est la densité de la matière du cylindre, il vient :

$$dm = \frac{P}{g} = \frac{VD}{g} = \frac{D}{g} \cdot \rho . d\alpha . d\rho . dz,$$

et, si nous posons

$$\frac{D}{g} = \varepsilon = \text{masse spécifique, il vient :}$$

$$dm = \varepsilon . \rho . d\alpha . d\rho . dz .$$

Son moment d'inertie par rapport à Ox sera

$$dm . d^2 = (y^2 + z^2)\ dm = \varepsilon .\ \rho .\ d\alpha .\ d\rho .\ dz\ (z^2 + \rho^2 \sin^2 \alpha),$$

car

$$y = \rho \sin \alpha .$$

Pour avoir le moment d'inertie de toute la masse cylindrique, il suffira d'intégrer en faisant varier α de $\alpha = 0$ à $\alpha = 2\pi$, ce qui nous donnera le moment d'inertie d'un cylindre creux de hauteur dz, puis on fera varier ρ de $\rho = 0$ à $\rho = r$. On obtiendra ainsi le moment d'inertie d'un cylindre plein de hauteur dz. Enfin en faisant varier z de $z = z_0$ à $z = z_1$, on obtiendra le moment d'inertie de tout le volume, c'est-à-dire de la tête. Nous sommes ainsi ramenés à évaluer a triple intégrale

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{z_0}^{z_1} \varepsilon .\ \rho\ d\alpha\ d\rho .\ dz\ (z^2 + \rho^2 \sin^2 \alpha .) =$$

$$= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{z_0}^{z_1} \varepsilon . \rho . d\alpha . d\rho . dz . z^2 + \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{z_0}^{z_1} \varepsilon . \rho^3 d\alpha .\ d\rho\, dz \sin^2 \alpha .$$

Les limites des intégrales étant constantes, cette intégrale triple peut se décomposer en trois intégrales simples successives comme suit :

$$\varepsilon . \int_0^r \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{z_0}^{z_1} z^2\ dz + \varepsilon \int_0^r \rho^3\, d\rho \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha\, d\alpha \int_{z_0}^{z_1} dz =$$

$$= \varepsilon \left\{ \frac{\rho^2}{2} \Bigg|_0^r \times \alpha \Bigg|_0^{2\pi} \times \frac{z^3}{3} \Bigg|_{z_0}^{z_1} + \frac{\rho^4}{4} \Bigg|_0^r \times \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos . 2\alpha}{2} \right) d\alpha \times z \Bigg|_{z_0}^{z_1} \right\},$$

car $\cos . 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$;

ou bien encore

$$\int dm\, d^2 = \varepsilon \left\{ \frac{r^2}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} \left(z_1^3 - z_0^3 \right) + \frac{r^4}{4} \left(z_1 - z_0 \right) \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \Big|_0^{2\pi} \right\}$$

ou

$$\int dm\, d^2 = \varepsilon \left\{ \frac{\pi r^2}{3} \left(z_1^3 - z_0^3 \right) + \frac{r^4}{4} \left(z_1 - z_0 \right) \frac{2\pi}{2} \right\}$$

$$A_1 = \int dm\, d^2 = \varepsilon . \pi r^2 (z_1 - z_0) \left\{ \frac{z_1^2 + z_0^2 + z_1 z_0}{3} + \frac{r^2}{4} \cdot \right\}.$$

Soit $2l$ la longueur du cylindre, z la distance du milieu de $2l$ à l'origine ; on aura

$$z_1 + z_2 = 2z.$$

$$z_1 - z_0 = 2l \text{ à cause des définitions.}$$

On tire de là

$$z_1 = z + l$$

$$z_0 = z - l.$$

Donc

$$z_1^2 + z_0^2 = 2(z^2 + l^2)$$

$$z_1 z_0 = z^2 - l^2$$

Remarquons, alors, que I s'écrit :

$$(1) \qquad A_1 = \varepsilon . 2\pi r^2 . l \left\{ \frac{3z^2 + l^2}{3} + \frac{r^2}{4} \right\} = \varepsilon . 2\pi r^2 l \left\{ z^2 + \frac{l^2}{3} + \frac{r^2}{4} \right\}.$$

Tel est le moment d'inertie cherché d'une tête de vis.

790. — **Application.**

De (1) on tire

$$A_1 g = D . 2\pi r^2 l \left\{ z^2 + \frac{l^2}{3} + \frac{r^2}{4} \right\},$$

car nous avons posé $\varepsilon = \frac{D}{g}$.

Soient

$$D = 9{,}3877 \qquad 2l = 1.05 \ ^m/_m$$

$$r = 0.64 \ ^m/_m. \qquad z = 9 \ ^m/_m$$

$$M = z^2 + \frac{l^2}{3} + \frac{r^2}{4} = 81{,}194275$$

$$N = D\, 2\pi r^2 l = 0.00110326 \text{ grammes}$$

$$\left.\begin{array}{l} \log. M = 1.9095254 \\ \log. N = \bar{3}.1032584 \end{array}\right| +$$

$$\log. A_1 . g = \bar{1}.0127838$$

$$(1) \qquad A_1 . g = 0.102987 \text{ gr. sec}^2\text{. mm.}$$

791.— II. *La fente* d'une vis à la forme d'un parallélipipède rectangle. En calculant le moment d'inertie d'une tête de vis, nous avons fait abstraction de ce vide. Nous devrons donc calculer le moment d'inertie d'une masse de substance identique à celle de la vis, et du volume des fentes, et le soustraire de A_1.

Soit α (fig, 255) l'angle de l'axe de la fente avec Ox. Soit

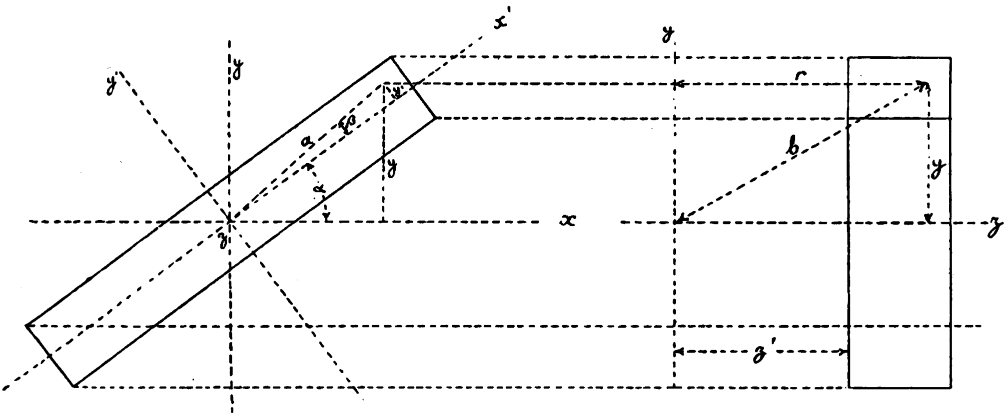


Fig 255.

Oy l'axe des moments ; Oz passera par le centre de la figure. Le moment d'inertie à évaluer sera

$$A_2 = \int r^2 dm.$$

Faisons tourner le système des axes d'un angle α autour de Oz et rapportons l'élément dm à ce nouveau système Ox', Oy'. On aura :

$$a^2 = x'^2 + y'^2.$$

on a :

$$r^2 = (z^2 + y^2)$$

et comme, par la rotation des axes, il vient

$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

On obtiendra

$$r^2 = z^2 + (x' \sin\alpha + y' \cos\alpha)^2,$$

et

$$A_2 g = D \int_{-\rho}^{+\rho} \int_{-y'}^{+y'} \int_{z_0}^{z_1} dx'\, dy'\, dz\, (z^2 + x'^2 \sin^2\alpha +$$
$$+ y'^2 \cos^2\alpha + 2x'y' \sin\alpha \cos\alpha),$$

c'est-à-dire

$$A_2g = D\int_{-\rho}^{+\rho} dx' \int_{-y'}^{+y'} dy' \int_{z_0}^{z_1} z^2\, dz + D\sin^2\alpha \int_{-\rho}^{+\rho} x'^2\, dx' \int_{-y'}^{+y'} dy' \int_{z_0} dz +$$

$$+ D\cos^2\alpha \int_{-\rho}^{+\rho} dx' \int_{-y'}^{+y'} y'^2\, dy' \int_{z_0}^{z_1} dz +$$

$$+ 2\, D \sin\alpha\cos\alpha \int_{-\rho}^{+\rho} x'\, dx' \int_{-y'}^{+y'} y'\, dy' \int_{z_0}^{z_1} dz.$$

$$A_2g = D.\, 2\,\rho.\, 2y'.\frac{(z_1^3 - z_0^3)}{3} + D\sin^2\alpha.\, \frac{2\,\rho^3}{3}.\, 2y'.(z_1 - z_0) +$$

$$+ D\cos^2\alpha.\, 2\,\rho.\frac{2\,y'^3}{3}(z_1 - z_0) + 2D\sin\alpha\cos\alpha\frac{2\rho^2}{2}\cdot\frac{2\,y'^2}{2}(z_1 - z_0)$$

$$= D.\, \frac{4\,\rho\, y'(z_1 - z_0)}{3}\left\{\rho^2\sin^2\alpha + y'^2\cos^2\alpha + \tfrac{3}{2}\,\rho.\,y'\sin\alpha\cos\alpha + z_1^2 + z_0^2 + z_1 z_0\right\}.$$

ou, en posant, comme précédemment, $z_1 + z_0 = z$,

$$z_1 - z_0 = 2\,l$$

$$(2)\quad A_2g = \frac{8\,D.\rho.y'l}{3}\left\{\rho^2\sin^2\alpha + y'^2\cos^2\alpha + \tfrac{3}{2}\,\rho\, y'\sin\alpha\cos\alpha + 3z^2 + l^2\right\}.$$

C'est ce que nous cherchions.

792. — **Calcul numérique :**

$\rho = 0.64.\quad y' = 0.0675,\quad z = 8.475 + 1.05 - 0.245 = 9.28$

$$l = 0.245$$

$$D = 9{,}3877$$

$$\log.\left(\frac{8\,D\rho.\,ly'}{3}\right) = \bar{4}{,}4231778.$$

1er *cas* $\quad \alpha = 0.\quad \cos\alpha = 1\quad \sin\alpha = 0.$

$$A_2g = \frac{8\,D\rho.y'l}{3}\left\{y'^2 + 3\,z^2 + l^2\right\}$$

$y'^2 + 3z^2 + l^2 = 258.41976\quad \log.(y'^2 + 3\,z^2 + l^2) = 2{,}41232559$

$$\log.\left(\frac{8\,D\rho y'l}{3}\right) = \bar{4}.4231778 \quad +$$

$$\log.\ A_2g = \bar{2}.8355034$$

$$A_2'g = 0.0684705.$$

2e *cas* $\alpha = 90^\circ$ $\cos\alpha = 0$ $\sin\alpha = 1$

$$A_2 g = \frac{8\,D.\,\rho.\,y'\,l}{3}\left\{\rho^2 + 3z^2 + l^2\right\}$$

$\rho^2 + 3z^2 + l^2 = 258{,}8248$ $\log.(\rho^2 + 3z^2 + l^2) = 2.4130058$

$\log.\frac{(8D\rho y' l)}{3} = \bar{4}.4231778$ +

$\log.A_2 g = \bar{2}.8361836$

$A_2'' g = 0.0685778.$

Nous prendrons pour valeur de $A_2 g$ une moyenne entre ces deux valeurs, soit :

$$(2) \qquad A_2 g = \frac{A_2' g + A_2'' g}{2} = 0.0685241.$$

Le moment d'inertie des têtes de vis fendues sera :

I. $A_1 g - A_2 g = 1{,}029873 - 0.0685241 = 0.961349.$

793.— III. *La partie filetée,* appelée communément la *jambe,* peut être considérée comme un cylindre dont le rayon est intermédiaire à celui de la gorge et à celui du sommet du filet. Son moment d'inertie A_3 aura donc la même forme que celui de la tête de vis, soit :

$$(3) \qquad A_3 g = D.\,2\pi\,r^2\,l\left\{z^2 + \frac{l^2}{3} + \frac{r^2}{4}\right\}.$$

On a ici :

$z = 8.475 - 0.415 = 8.06 =$

rayon du balancier moins la demi-longueur de la jambe,

$l = 0.415 =$ demi-longueur de la jambe,

$r = 0.2 \quad =$ rayon moyen.

Alors :

$\log.(D.\,2\pi\,r^2.\,l) = \bar{4}{,}9908473$ (en grammes)

$\log.\left(z^2 + \frac{l^2}{3} + \frac{r^2}{4}\right) = 1.8131204$ +

$\log.A_3 g = \bar{2}.8039677$

(3) $A_3 g = 0.0636748.$

794.—IV. *La pointe* de la vis est un cône dont l'axe Z est perpendiculaire à l'axe des moments.

Le moment d'inertie d'un disque de rayon r et d'épaisseur

dz, taillé dans le cône de la pointe, à une distance z de O et perpendiculairement à Oz sera :

$$A_4 g = \int dm . d^2 = \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho \, d\alpha . dr dz . D. (y^2 + z^2) =$$

$$= D. \pi r^2 \left(z^2 + \frac{r^2}{4}\right) dz,$$

car $y = \rho \sin \alpha$.

Posons $z = k + h$ et

$$r = b\, h,$$

où b est une constante, k la distance OA et h la distance variable Ab. Alors

$$dz = dh$$

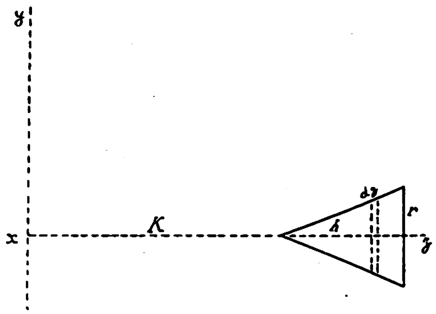


Fig. 256.

et

$$A_4 g = D. \pi \, b^2 h^2 \left[(k + h)^2 + \frac{b^2 h^2}{4}\right] dh =$$

$$= D\pi \, b^2 h^2 \left[k^2 + 2hk + h^2 + \frac{b^2 h^2}{4}\right] dh =$$

$$= D\pi b^2 (k^2 h^2 dh + 2\, kh^3 dh + h^4 dh + \frac{b^2 h^4}{4} dh.$$

Donc

$$A_4 g = \int_0^h A_4 g = D\pi \, b^2 \left(\frac{k^2 h^3}{3} + \frac{kh^4}{2} + \frac{h^5}{5} + \frac{b^2 h^5}{20}\right) =$$

$$= D\, b^2 \, h^3 \pi \left(\frac{k^2}{3} + \frac{kh}{2} + \frac{h^2}{5} + \frac{b^2 h^3}{20}\right)$$

et, puisque $bh = r$,

$$(4) \qquad A_4 g = D. \pi . r^2 . h \left(\frac{k^2}{3} + \frac{kh}{2} + \frac{h^2}{5} + \frac{r^2}{20}\right).$$

795. **Calcul numérique.** — Soit

$k = R - 2l - h = 8{,}475 - 0{,}83 - 0{,}355 = 7.29$

$h = 0.355$	$\frac{k^2}{3} = 17.7147$
$r = 0.2$	$\frac{kh}{2} = 1.294$
	$\frac{h^2}{5} = 0.0252$
	$\frac{r^2}{20} = 0.002$
	Somme $= 19.0359$

$$\log.\,\text{somme} = 1.2795734$$
$$\log.\,\pi r^2 h.\text{D} = \bar{1}.6219976$$
$$\log.\ \text{A}_4 g = 0.9015710 \text{ mgr. sec.}^2\ {}^{m}/_{m}$$
$$= \bar{3}.9015710 \text{ gr. } \overline{\text{sec.}}^2\ {}^{m}/_{m},$$

d'où

$$(4) \qquad \text{A}_4 g = 0.00797207.$$

796. — Nous aurons donc, pour le moment d'inertie total d'une vis de balancier, la somme suivante :

moment d'inertie de la tête	= 0.961349
» » » jambe	= 0.063675
» » » pointe	= 0.007972
moment d'inertie d'une vis	= 1.032996.

Si nous avons 16 vis sur le balancier, nous obtiendrons :

moment d'inertie de 16 vis = 16,52793, gr. $\overline{\text{sec.}}^2$ mm^2.

797. — V. **Moment d'inertie de la serge du balancier.**

La serge d'un balancier est formée de deux jantes cylindriques, l'une extérieure en laiton et l'autre intérieure en acier.

Nous allons déterminer le moment d'inertie d'un cylindre à base circulaire tournant autour de son axe.

Soient ρ le rayon du cylindre, h sa hauteur. Le volume du cylindre élémentaire creux, d'épaisseur dr, est

$$u = [\pi(\rho + d\rho)^2 - \pi(\rho^2)]h. = 2\pi h \rho d\rho,$$

en négligeant les infiniment petits du second ordre. Le moment d'inertie cherché sera :

$$(5) \qquad \text{A}_5 g = \int_{r_1}^{r_2} 2\pi h.\rho d\rho.\rho^2 \text{D} = \text{D}.2\pi.h \int_{r_1}^{r_2} \rho^3 d\rho =$$
$$= \frac{\pi h \text{D}}{2}(r^4{}_2 - r^4{}_1).$$

Si $\quad r_2 = 8.475 \qquad h = 1.38$
$\quad r_1 = 8.097 \qquad \text{D} = 8.6,.$

on trouve

$$(5) \qquad \text{A}_5 g = 16,04405 \text{ pour le laiton.}$$

Comme la serge est chanfreinée, nous devrons en déduire le moment d'inertie des chanfreins.

798.— VI. *Chanfreins*. Leur section a la forme d'un triangle. Ils constituent des anneaux circulaires de section triangulaire. Leur moment d'inertie sera donc aussi exprimé par

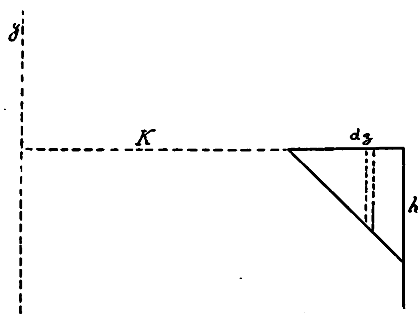


Fig. 257.

$$A_5 g = \int \rho^3 . d\rho . 2\pi . h . D.,$$

où h variera avec z.

Posons $\rho = K + z$
$h = bz$;

alors

$$d\rho = dz$$

et

$$A_5 g = \int D . 2\pi . (K + z)^3 . dz . b . z . = 2\pi b . D \int_0^h (K^3 + 3K^2 z + 3Kz^2 + z^3) z . dz.$$

$$(6) \quad A_5 g = 2\pi b D \left(\frac{K^3 h^2}{2} + K^2 h^3 + \frac{3 K h^4}{4} + \frac{h^5}{5} \right).$$

Si la section est un triangle isocèle, on a $b = 1$

et

$$(6) \qquad A_5 g = 2\pi D \left(\frac{K^3 h^2}{2} + K^2 h^3 + \frac{3 K h^4}{4} + \frac{h^5}{5} \right) \times 2$$

pour les deux chanfreins.

799. — **Application numérique.**

Si $h = 0.05$, $K = r - h = 8.475 - 0.05 = 8.425$.

Alors

$$\left(\frac{K^3 h^2}{2} + K^2 h^3 + \frac{3 K h^4}{4} + \frac{h^5}{5} \right) = 0.7564266$$

$$(6) \qquad A_5 g = 0.0817475 \text{ gr. sec.}^2 \text{mm}^2.$$

Tel est le moment d'inertie de la partie chanfreinée de la serge.

800. — VII. *Trous de vis*. Nous avons trouvé précédemment pour le moment d'inertie du cylindre :

$$A_6 g = 2\ D.\ \pi.\ r^2\, l \left\{ z^2 + \frac{l^2}{3} + \frac{r^2}{4} \right\}.$$

801. **Application numérique.** En prenant

$$z = r - l = 8.475 - 0.189 = 8.286$$

$$2\,l = 0{,}378 = \text{épaisseur du laiton}$$

$$r = 0{,}2 = \text{rayon},$$

il vient :

(7) $\underline{A_6\, g = 0.729461}$ gr. sec.^{2}mm^2 pour 26 trous.

802. — VIII. *Les deux coupures* du balancier. Elles affectent la forme de parallèlipipèdes rectangles dont le grand axe est parallèle à l'axe de rotation. Nous avons déterminé le moment d'inertie d'une fente de vis sous la forme

$$A\, g = \frac{8\, D \rho .\, y' .\, l}{3} \left\{ \rho^2 \sin^2 \alpha + y'^2 \cos^2 \alpha + \tfrac{3}{2} \rho\, y' \sin \alpha \cos \alpha + 3\, z^2 + l^2 \right\},$$

α étant l'angle du grand axe du parallélipipède déterminé par la fente avec l'axe de rotation ou des moments. Dans notre cas, $\alpha = 0^\circ$, $\cos \alpha = 1$, $\sin \alpha = 0$,

et

$$(8) \qquad \underline{A_7 g = \frac{8\, D.\, \rho.\, y'\, l}{3} \left\{ y'^2 + 3 z^2 + l^2 \right\}.}$$

803. — **Application numérique.**

$$z = r - l = 8{,}475 - 0.189 = 8{,}286$$

$$l = 0.189 = \text{demi épaisseur du laiton}$$

$$y' = 0.225 = \text{demi largeur de la fente}$$

$$h = 1.38 = \text{hauteur de la serge},$$

(8) $\underline{A_7 g = 0.277319}$ gr. sec.^{2}mm^2.

804. — **Résumé du calcul du moment d'inertie de la serge « laiton » du balancier.**

Moment d'inertie des 2 chanfreins	= 0.0817475	+
» » » 26 trous	= 0.729461	
» » » 2 coupures	= 0.277319	
Total	= 1.0885275.	
Moment d'inertie de la jante de laiton	= 16,04405	—
» » des chanfreins, trous et coupures	= 1.0885275	

(9) *Moment d'inertie résultant* $= 14.9555225$ gr. sec.,^{2} mm^2
pour le laiton.

805. — *Partie d'acier.* Pour la partie cylindrique de la serge d'acier, un calcul analogue au précédent nous donnera le moment d'inertie. Nous nous bornerons à donner les résultats :

jante (*anneau plat*) formule (5)

$$A_5 g = \frac{\pi h . D}{2} (r_2{}^4 - r_1{}^4)$$

Ici $h = 1{,}38$ $\quad r_2 = 8{,}097$ $\quad r_1 = 7{,}863$ $\quad D = 8$

et

$$A_5 g = \underline{8{,}25021} \text{ gr. mm}^2 \text{ sec.} .$$

Chanfreins. Nous avons vu (Chanfreins VI) que

$$A_5 g = \int \varrho^3 d\varrho . 2\pi h . D.$$

$$\text{Si } \varrho = K - z \text{ et } h = b z,$$

$$d\varrho = - dz$$

Substituant, il vient

$$A_5 g = - \int_0^h 2\pi b D (K^3 z - 3 K z^2 + 3 K z^3 - z^4) dz$$

et, avec $b = 1$ pour les 2 angles,

$$2 A_5 g = 4 \pi D \left(\frac{K^3 h^2}{2} + \frac{3 K h^4}{4} - K^2 h^3 - \frac{h^5}{5} \right).$$

Si $h = 0.05$ $\quad K = 7.863 + 0.05 = 7.913,$ $\quad D = 8,$

il vient

$$2 A_5 g = \underline{0{,}0614804}.$$

Trous de vis. La formule trouvée (VII) :

$$A_6 g = 2\pi D r^2 l \left\{ z^2 + \frac{l^2}{3} + \frac{r^2}{4} \right\},$$

donne pour

$$z = 7{,}863 + 0.117 = 7{,}98, \qquad l = 0.117 \qquad r = 0{,}2.$$

$$A g = 0{,}38957.$$

Les deux coupures. La formule trouvée (VII), pour $\alpha = 0°$ donne

$$A_7 g = \frac{8 D \varrho y' l}{3} \left\{ y'^2 + 3 z^2 + l^2 \right\}.$$

Si $z = 7.98$, $l = 0{,}117$ $y' = 0.225$ $h = 1.38$.

$$A_7 g = 0{,}148108.\ \text{gr. sec.}^2\text{mm}^2.$$

806. — **Résumé du calcul du moment d'inertie de la serge « acier » du balancier.**

Moment d'inertie des 2 chanfreins	= 0.0614804	+
» » » 26 trous	= 0.38957	
» » » 2 coupures	= 0.148108	
Total	= 0.5991584.	

Moment d'inertie de la jante acier	= 8,25021	—
Total des moments d'inertie des chanfreins, trous et coupures	= 0.5991584	

(10) Moment d'inertie de la partie *acier* = 7,6510516 gr. sec.^{2} mm^2.

807. — **Serge totale.**

Moment d'inertie de la partie en laiton	= 14,95552	+
» » » acier	= 7.6510516	

(A) Moment d'inertie de la serge = 22,6065716 gr. sec.^{2} mm^2.

808. IX. — **Moment d'inertie des deux bras du balancier.** Chacun d'eux a la forme d'un trapèze, qui lui-même peut être envisagé comme formé de deux triangles tronqués accolés par leur grande base.

Nous aurons donc à rechercher le moment d'inertie d'un triangle isocèle par rapport à un axe se projetant sur le milieu de la base.

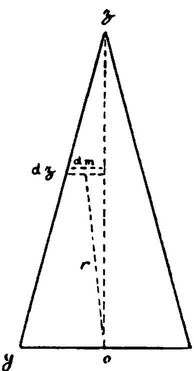


Fig. 258.

Le moment d'inertie d'un élément de masse dm est

$$r^2\, dm = (y^2 + z^2)\, dy\, dz\, dx\, D,$$

et le moment total sera

$$A_8 g = \int_0^h \int_0 \int_0^y r^2\, dm = D \int_0^z h\left(\frac{y^3}{3} + y z^2\right) dz.$$

Soit K la hauteur du triangle; alors

$$y = (K - z)\, b,$$

où b est une constante et

$$A_8 g = D \int_0^z h\, b \left(\frac{K^3}{3} - K^2 z + 2 K z^2 - \frac{4 z^3}{3}\right) dz.$$

$$A_8 g = b h \left(\frac{K^3 z}{3} + \frac{2 K z^3}{3} - \frac{K^2 z^2}{2} - \frac{z^4}{3}\right) D.$$

En multipliant par 4, nous obtiendrons le moment cherché :

(11) $$A_8 g = 4 A_8' g = 4 b. h. \left(\frac{K^3 z}{3} + \frac{2 K z^3}{3} - \frac{K^2 z^2}{2} - \frac{z^4}{3}\right) D.$$

809. — **Application numérique.**

$z = 7,863$ rayon intérieur de la serge
$h = 0,36$ épaisseur des bras
$y = 1,2$ demi largeur des bras au centre
$y' = 0,5$ demi largeur des bras vers la serge

$$K = \frac{z y}{y - y'} = \frac{7,863 \times 1.2}{0.7} = 13.47942,$$

et si $z = 0$, l'équation $y = (K - z)\, b$
donne

$$b = \frac{y}{K} = \frac{1.2}{K}.$$

On trouve alors, tous calculs faits, et pour les deux bras :

(11) $$A_8 g = 4 \times 0.499557 \times 2 \text{ gr. } \overline{\text{sec.}}^2 \text{ mm.} =$$
$$= 3,996456 \text{ gr. sec.}^2 \text{ mm.}^2$$

810. X. — **Moment d'inertie du trou central du balancier.**

Pour un cylindre droit par rapport à son axe, le moment d'inertie est :

(13) $$A_9 g = \frac{\pi h D}{2} r^4.$$

Si $h = 0.36$ $r = 0.65$ $D = 8$

(12) $$A_9 g = 0.00080754$$

Le moment d'*inertie du bras* avec le trou central sera :

(B) (14) $$\underline{A_8 g - A_9 g = 3,99564046.} \text{ gr. sec.}^2 \text{ mm}^2.$$

811. XI. — **Moment d'inertie de l'axe du balancier.**

Pour le déterminer, nous prendrons le moment d'inertie de chacune de ses parties séparément. Elles affectent d'ailleurs toutes une forme cylindrique ou conique. Or, nous connaissons le moment d'inertie d'un cylindre de rayon r et de hauteur h tournant autour de son axe. Il est donné par

$$(13) \qquad Ag = \frac{\pi h . D}{2} \cdot r^4.$$

812. — **Moment d'inertie d'un cône par rapport à son axe.** Soit Ox cet axe.

Le volume élémentaire du cône est

$\pi y^2 dx$, sa masse $dm = \pi D. y^2. dx$,

et, dès lors, le moment total

$$A_{10}\, g = D\int_{x_1}^{x_2} \pi. \frac{y^4}{2} dx = D\pi \int \frac{y^4}{2} \cdot dx.$$

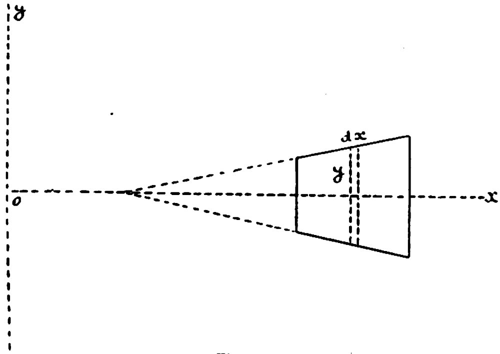


Fig. 259.

On a (fig. 259)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{h}{\rho},$$

d'où

$$dx = \frac{h}{\rho} dy.$$

Donc

$$(15) \qquad A_{10}\, g = D. \frac{\pi}{10} \cdot y^5 \frac{h}{\varrho} \Big|_{r'}^{r} = D \frac{\pi}{10}\left(r^5 - r'^5\right) \frac{h}{\varrho}.$$

$$\rho = r - r'$$

813. **Calcul numérique.** — Appliquons successivement ces deux formules (13) et (15) au calcul du moment d'inertie de chacune des parties composant l'axe, il vient :

814. 1) **Pivots.** — Cylindre formule (13).

$$(a) \qquad Ag = \frac{\pi h D}{2} \cdot r^4.$$

$$r = 0.055 \qquad h = 0,15 \qquad D = 8.$$

Pour les deux pivots :

$$(a) \quad Ag = 2 \times \frac{\pi h D}{2} r^4 = 0.0000000345 \text{ gr. } \overline{\text{sec.}}^2\, \overline{\text{mm}}^2.$$

815 2). — **Cône du pivot supérieur.**

Formule (15).

$$Ag = \frac{D\pi}{10}\left(r^5 - r'^5\right)\frac{h}{\varrho}.$$

Données. $r = 0.25 \qquad r' = 0.055 \qquad h = 0.45$

(b) $Ag = 0.000005661$ gr. sec.^{2} mm^2.

816. 3). — **Cône renversé du pivot supérieur.**

Formule (15).

Données $h = 0.55 \quad r = 0.25 \quad r' = 0.2.$

(c) $Ag = 0.000018151$ gr. sec.^{2} mm^2.

817. 4). — **Ajustement de la virole.**

Formule (13).

Données. $r = 0.36 \quad h = 1,1.$

(d) $Ag = 0.000232173$ gr. sec.^{2} mm^2.

818. 5). — **Piqûre.**

Affecte la même forme que les chanfreins. Nous avions trouvé pour le moment d'inertie de ces derniers (VI, pour $b = 1$) :

$$Ag = 2\pi D \left(\frac{K^3 h^3}{2} + K^2 h^3 + \frac{3K h^4}{4} + \frac{h^5}{5}\right).$$

Données. $K = 0.65 \quad h = 0.2.$

(e) $Ag = 0.000142176.$

819. 6) — **Moment d'inertie de l'ajustement du balancier.**

Nous retranchons du moment d'inertie du trou central du balancier, qui est le même que celui de l'ajustement du balancier sans la piqûre, le moment d'inertie de la piqûre.

Or, le moment d'inertie du trou du balancier	= 0,00080754.	(12) (X).
Moment d'inertie de la piqûre	= 0.000142176	—

(f) Moment d'inertie de l'ajustement = 0,000665364 gr. sec.^{2} mm^2.

820. 7). **Assise du balancier.** — Nous supposons cette assise tronc-conique.

Données. $r = 0.9 \quad r' = 0.65 \quad h = 0.45,$

formule (15).

(g) $Ag = 0,002146406$ gr. sec.^{2} mm^2.

821. (8). **Ajustement du grand plateau.** — Formule (13).

Données. $h = 1.25 \quad r = 0.3 \quad D = 8.$

(h) $Ag = 0,000127235$ gr. sec. ^{2}mm^2.

822. 9). **Ajustement du petit plateau.** — Même formule.

Données. $h = 1.2$ $r = 0.21$ $D = 8$.

(*i*) $Ag = 0.000029327$ gr. sec.^{2} mm^2.

823. 10). **Cône renversé du pivot inférieur.** — Formule (15).

Données. $r = 0.2$ $r' = 0.175$ $h = 0.35$ $D = 8$. $\frac{h}{\varrho} = 14$.

(*k*) $Ag = 0.0000054844$ gr. sec.^{2} mm^2.

824. 11). **Cône du pivot inférieur.** — Même formule.

Données. $r = 0.2$ $h = 0.35$, $D = 8$, $\frac{h}{\varrho} = 2{,}413753$,

$r' = 0{,}055$.

(*l*) $Ag = 0.00000193823$ gr. sec.^{2} mm^2.

825. — **Moment d'inertie total de l'axe.**

Additionnant les valeurs trouvées de (*a*) à (*l*), nous obtenons :

moment d'in. total = (*a*) + (*b*) + (*c*) + ... + (*l*)

moment d'inertie		des deux pivots	0,0000000345
»	»	du cône	0,000005661
»	»	du cône renversé	0,000018151
»	»	de l'ajustement de la virole	0,000232173
»	»	id. du balancier	0,000665364
»	»	de l'assise	0,002146406
»	»	de l'ajustage du grand plateau	0,000127235
»	»	de l'ajustage du petit plateau	0,000029327
»	»	du cône renversé	0,0000054844
»	»	du cône du pivot	0,00000193823.

(*c*) Moment d'inertie total de l'axe = 0,00323177413 gr. sec^2 mm^2.

Le poids de l'axe est de 0,0185 gr.

826. XII. — **Moment d'inertie du grand plateau.**

Admettons que sa forme soit celle de la fig. 260 :

C'est celle des bras du balancier. La formule établie dans ce cas était : (11) (IX) :

$$Ag = 4b.h\,D\left(\frac{K^3\varepsilon}{3} + \frac{2K\varepsilon^3}{3} - \frac{K^2\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^4}{3}\right).$$

Données. $z = 2{,}1 \quad y = 0.875 \quad y' = 0.6 \quad K = \frac{zy}{y - y'} =$

$$= 6.68182 \quad b = \frac{y}{K} = \frac{0.875}{K}.$$

$$h = 0.55.$$

$$A_1 g = 0.334536.$$

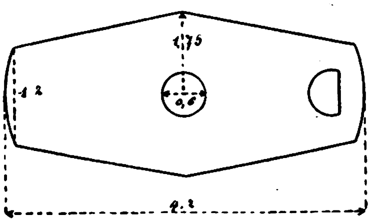


Fig. 260.

De cette valeur, il faut déduire le moment d'inertie du trou central. Nous ne tiendrons pas compte de celui de la cheville du plateau parce que le poids spécifique du rubis est à celui de l'acier à peu près dans le même rapport que l'épaisseur du plateau à la longueur de cette cheville.

827. **Trou central.** — C'est un cylindre. Donc, formule (13)

$$Ag = \frac{\pi h . D . r^4}{2}.$$

Données. $h = 0.55 \quad r = 0{,}3. \quad D = 8.$

$$A_2 g = 0.000055983 \text{ gr. sec.}^2 \text{ mm}^2.$$

Moment d'inertie du grand plateau sans trou central $= 0.334536$

Moment d'inertie du trou central $= 0.000055983$

(*d*) Moment d'inertie du grand plateau $= 0.334480017$ gr. sec.^{2} mm^2

828. (XIII). **Moment d'inertie du petit plateau.** — C'est un cylindre ; donc formule (13).

Données. $h = 0.6 \quad r = 1 \quad D = 8.$

$$A_1 g = 0.0075398.$$

Moment du trou central $= 0.0000147.$ |
» de la feuille de sauge $= 0.0009$ | +

Moment du trou central et de la feuille de sauge $= 0.0009147 = A_2 g.$

Donc

$A_1 g = 0.0075398$ |
$A_2 g = 0.0009147$ | —

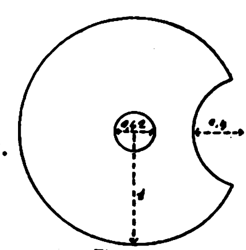


Fig. 261.

(*e*) Moment du petit plateau $= 0{,}0066251$ gr. sec.^{2} mm^2.

829. XIV. **Moment d'inertie de la virole.** — Cylindre creux. Formule (15).

$$Ag = \frac{\pi h . D}{2} (r^4 - r'^4).$$

Données. $h = 1.1$ $r = 0.95$ $r_1 = 0.36$ $D = 8,6$.

(*f*) $Ag = 0.0118537$ gr. sec.^{2} mm^2.

Résumé.

830. — **Moment d'inertie du balancier.**

	Moment d'inertie A g.	*Poids* (gr.)
16 vis	16.52793	0,208
serge	22,60657	0.4116 (serge et bras)
bras	3,99646	
axe	0,00323	0.0185
grand plateau	0,33448	0.025
petit plateau	0,00662	0.014
virole	0.01185	0.032
Total	$Ag = 43.48714$ gr. sec.^{2} mm^2	P=0.7091 gr.

831. — **Rayon de giration,** R.

Nous avons la formule (634)

$$A = \frac{P}{g} R^2, \text{ d'où } R = \sqrt{\frac{Ag}{P}},$$

de laquelle il vient

$$R^2 = 61.3272$$
$$R = 7.8312.$$

Moment d'inertie, A.

$$A = \frac{Ag}{g}.$$

ou

$$A = 0.0044332 \text{ gr. sec.}^2 \text{ mm}^2.$$

Moyen expérimental de déterminer le rayon de giration d'un balancier.

832. Suspendons le balancier considéré, au moyen d'un couteau C (fig. 262), de telle façon qu'il puisse osciller autour

de cette lame. Nous déterminerons le temps T d'une oscillation.

Soit a la distance du centre de gravité au centre d'oscillation, l la longueur du pendule mathématique synchrone, K le rayon de giration par rapport au centre d'oscillation, c'est-à-dire la quantité telle que

$$A = MK^2,$$

M étant la masse du balancier, R le rayon de giration par rapport à l'axe du balancier. Nous avons :

$$l = \frac{\Sigma m r^2}{M a} = \frac{K^2}{a}$$

et

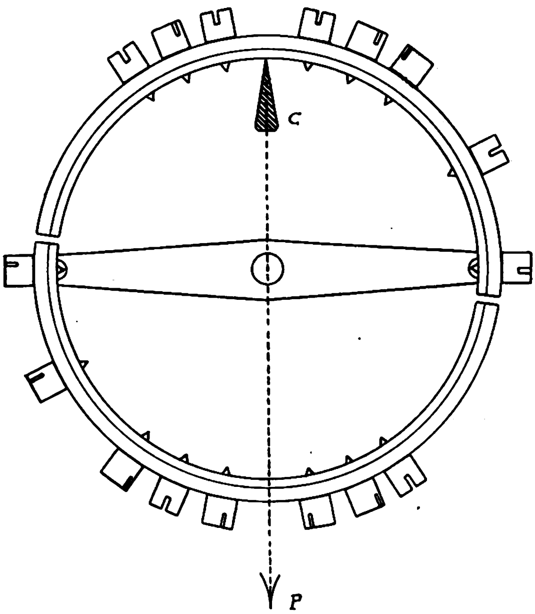


Fig. 262.

$$l = \frac{g T^2}{\pi^2},$$

d'où

$$K^2 = \frac{a g T^2}{\pi^2}.$$

Alors

$$R^2 = K^2 - a^2 = a\left(\frac{g T^2}{\pi^2} - a\right);$$

cette formule fait connaître R.

Ce moyen peut être employé pour de très grands balanciers en plaçant le couteau à l'intérieur de la serge ; pour les balanciers de montres courantes, il est difficile de déterminer le temps T, car les oscillations se font très rapidement. On peut en effet compter un certain nombre d'oscillations quand T n'est pas inférieur à 0,2 seconde.

Recherchons la valeur de a pour le balancier dont nous avons calculé le rayon de giration.

L'équation ci-dessus donne :

$$a = \frac{1}{2} g \cdot \frac{T^2}{\pi^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(g\frac{T^2}{\pi^2}\right)^2 - R^2},$$

d'où, en remplaçant les lettres par leur valeur :

$$a = 19.8782 \pm \sqrt{395,141 - 7,8312^2}$$

$$a' = 19,8782 + 18,27056 = 38.14876 \,{}^{m}/_{m}$$

$$a'' = 19,8782 - 18.27056 = 1.60764 \,{}^{m}/_{m}.$$

Puissance réglante du balancier.

833. — La puissance réglante d'un balancier est d'autant plus grande qu'une force agissant dans des conditions identiques produira une plus petite différence dans la durée des oscillations.

Admettons qu'une force constante de moment F agisse sur le balancier indépendamment de la force du spiral et depuis $\alpha = \alpha_1$ jusqu'à $\alpha = 0$. L'angle décrit par le balancier de α_1 à zéro est donc une grandeur constante. C'est α_0 qui est variable.

Le temps que dure une demi-oscillation, se composera de celui t'' qui correspond à l'angle α_1 et de celui, t', qui correspond à l'angle $\alpha_0 - \alpha_1$. Ce dernier est donné par l'équation (648) :

$$1) \qquad t' = \sqrt{\frac{A}{M}} \arccos.\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)$$

Calculons t''.

Le moment des forces qui agissent sur le balancier pendant cette période est

$$M\alpha + F.$$

Soit ω_1 la vitesse angulaire du balancier à la distance angulaire α_1 de sa position de repos. La vitesse angulaire ω à un moment donné sera :

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \frac{M(\alpha_1^2 - \alpha^2) + 2F(\alpha_1 - \alpha)}{A},$$

dans laquelle

$$\omega_1^2 = \frac{M(\alpha_0^2 - \alpha_1^2)}{A}.$$

On tire de là :

$$\omega^2 = \frac{M(\alpha_0^2 - \alpha^2) + 2F(\alpha_1 - \alpha)}{A}$$

et, comme

$$d\alpha = \omega\, dt,$$

il viendra :

$$dt = \sqrt{\frac{A}{M}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2 + \frac{2F}{M}\alpha_1 - \frac{2F}{M}\alpha}} =$$

$$= \sqrt{\frac{A}{M}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\left(\alpha_0^2 + 2\frac{F}{M}\alpha_1\right) - 2\frac{F}{M}\alpha - \alpha^2}}.$$

En intégrant, on retombe sur une forme d'intégrale déjà résolue précédemment avec beaucoup de développements. On trouve :

$$t'' = \sqrt{\frac{A}{M}} \operatorname{arc\,sin.} \frac{\alpha + \frac{F}{M}}{\sqrt{\alpha_0^2 + 2\frac{F}{M}\alpha_1 + \left(\frac{F}{M}\right)^2}} \Bigg|_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha_1}$$

ou

$$2) \qquad t'' = \sqrt{\frac{A}{M}} \left\{ \operatorname{arc\,sin} \frac{\alpha_1 + \frac{F}{M}}{\sqrt{\alpha_0^2 + 2\frac{F}{M}\alpha_1 + \left(\frac{F}{M}\right)^2}} - \operatorname{arc\,sin} \frac{\frac{F}{M}}{\sqrt{\alpha_0^2 + 2\frac{F}{M}\alpha_1 + \left(\frac{F}{M}\right)^2}} \right\}.$$

Le temps total t employé par le balancier à décrire l'arc d'amplitude α_0 sera alors :

$$(3)\quad t = t' + t'' = \sqrt{\frac{A}{M}} \left\{ \operatorname{arc\,cos.} \frac{\alpha_1}{\alpha_0} + \operatorname{arc\,sin.} \frac{\alpha_1 + \frac{F}{M}}{\sqrt{\alpha_0^2 + 2\frac{F}{M}\alpha_1 + \left(\frac{F}{M}\right)^2}} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arc\,sin.} \frac{\frac{F}{M}}{\sqrt{\alpha_0^2 + 2\frac{F}{M}\alpha_1 + \left(\frac{F}{M}\right)^2}} \right\}.$$

En l'absence de toute force F, le temps $t' + t''$ deviendrait :

$$(4)\qquad t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{A}{M}},$$

pour une demi-oscillation.

Ce temps est égal à 0^s1 pour une montre battant 18000 oscillations par heure. Dès lors, si nous supposons que F agisse pendant toute la durée de la demi-oscillation, $\alpha_1 = \alpha_0$, (3) devient :

$$(5)\qquad t = \sqrt{\frac{A}{M}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sin.} \frac{\frac{F}{M}}{\sqrt{\alpha_0^2 + 2\frac{F}{M}\alpha_0 + \left(\frac{F}{M}\right)^2}} \right\}.$$

Si nous faisons F = M, il vient encore :

$$(6)\qquad t = \sqrt{\frac{A}{M}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sin.} \frac{1}{\alpha_0 + 1} \right\}.$$

Il est clair que la différence :

$$(7)\qquad t_1 - t = \sqrt{\frac{A}{M}} \operatorname{arc\,sin.} \frac{1}{\alpha_0 + 1},$$

représente le nombre de secondes en plus ou en moins que dure une demi-oscillation dans l'un ou l'autre cas. En faisant varier α_0, on obtiendra différentes valeurs de $t_1 - t$. On peut représenter graphiquement la marche de cette fonction en portant sur un axe horizontal les arcs α_0 et sur un axe vertical les valeurs de $t_1 - t$ correspondantes. C'est ce que montre la fig. (263).

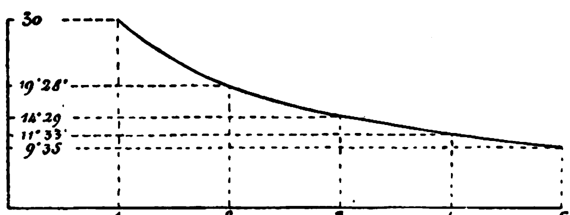


Fig. 263.

On constate qu'une même force F, agissant sur un balancier sollicité par la force d'un spiral de moment M, produit dans la durée des oscillations des différences d'autant moindres que l'amplitude des oscillations est plus grande.

Les frottements des pivots du balancier produisent une force dont le moment est constant et qui agit pendant toute l'oscillation ; c'est pour cette raison que la variation qu'ils occasionnent, est moindre pour les grandes que pour les petites oscillations.

834. — Supposons maintenant que α_0 soit constant (égal à 4 par exemple) et faisons varier la valeur du rapport $\frac{F}{M}$; nous obtiendrons différentes valeurs de $t_1 - t$, que nous pouvons également représenter graphiquement en fonction des valeurs de $\frac{F}{M}$, ainsi que le montre la (fig. 264). On constate que $t_1 - t$ est plus grand pour une grande valeur de $\frac{F}{M}$ que pour une petite valeur, mais qu'il n'y a pas tout-à-fait proportionnalité entre ces deux quantités.

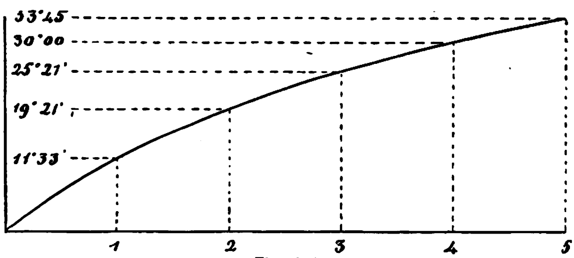


Fig. 264.

835. — Revenons au problème principal. Remarquons que le facteur $\sqrt{\frac{A}{M}} = \frac{T}{\pi}$ doit être multiplié par 86400 fois le nombre d'oscillations en une seconde. Nous aurons ainsi la variation $t_1 - t$ en un jour. Prenons de plus, dans (3), $\alpha_0 = 4$, $\alpha_1 = 1$, F = 1, et M = 1.2.3.4... Nous aurons :

1°) pour M = 1 $432000\,[t - (t' + t'')] = 205{,}6$ secondes.
2°) pour M = 2 » = 105,86 »
3°) pour M = 3 » = 71,33 »
4°) Pour M = 4 » = 53,73 »
5°) Pour M = 5 » = 40,265 »

Le graphique correspondant au cas $\alpha_0 = 4$, $\alpha_1 = 1$, $F = 1$ (fig. 265), montre que $t - (t' + t'')$ est à peu près inversement

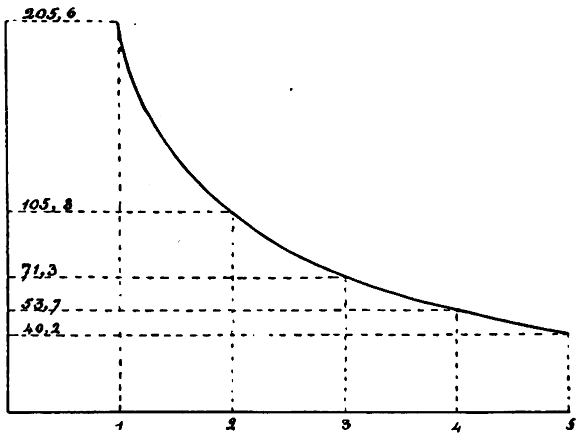


Fig. 265.

proportionnel au moment M de la force du spiral et directement proportionnel au moment F.

836. — **Remarque.** De la formule $T = \pi \sqrt{\dfrac{\dfrac{P}{g} \cdot R^2}{M}}$,

on tire

$$M = \frac{\pi^2}{g} \frac{P R^2}{T^2}.$$

Ainsi la puissance réglante d'un balancier est proportionnelle à son poids, au carré de son rayon de giration et inversement proportionnelle au carré de la durée T des oscillations.

837. — Examinons maintenant le cas où la force F agirait à partir du commencement de l'oscillation, de $\alpha_0 = 4$ à $\alpha_1 = 3$, au lieu d'agir depuis $\alpha_1 = 1$ à zéro. Soit $F = 1$ et $M = 1$.

La durée t' de la première période allant de α_0 à α_1 est :

$$t' = \sqrt{\frac{M}{A}} \text{ arc cos } \frac{\alpha_1 + \dfrac{F}{M}}{\alpha_0 + \dfrac{F}{M}}.$$

Pour déterminer t'', nous avons l'équation :

$$\frac{1}{2}\omega^2 A = \frac{1}{2}\omega_1^2 A + \frac{1}{2} M (\alpha_1^2 - \alpha^2)$$

ou

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \frac{M}{A}(\alpha_1^2 - \alpha^2).$$

Mais, comme

$$\omega_1^2 = \frac{M}{A}(\alpha_0^2 - \alpha_1^2) + \frac{2F}{A}(\alpha_0 - \alpha_1),$$

il vient :

$$\omega^2 = \frac{M}{A}\alpha_0^2 + \frac{2F}{A}(\alpha_0 - \alpha_1) - \frac{M}{A}\alpha^2,$$

ou aussi

$$\omega^2 = \frac{M}{A}\left\{\alpha_0^2 + \frac{2F}{M}(\alpha_0 - \alpha_1) - \alpha^2\right\}.$$

Par suite :

$$dt = \sqrt{\frac{A}{M}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2 + \frac{2F}{M}(\alpha_0 - \alpha_1) - \alpha^2}},$$

d'où enfin

$$t'' = \sqrt{\frac{A}{M}} \text{arc sin.} \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_0^2 + \frac{2F}{M}(\alpha_0 - \alpha_1)}} + C.$$

Comme t'' s'annule en même temps que α, $C = 0.$; donc

$$t'' = \sqrt{\frac{A}{M}} \text{arc sin.} \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_0^2 + \frac{2F}{M}(\alpha_0 - \alpha_1)}};$$

par suite, nous avons, pour la durée d'une demi-oscillation :

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{A}{M}}\left\{\text{arc cos.} \frac{\alpha_1 + \frac{F}{M}}{\alpha_0 + \frac{F}{M}} + \text{arc sin.} \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_0^2 + \frac{2F}{M}(\alpha_0 - \alpha_1)}}\right\}$$

838. — **Application numérique.**

Soit $\alpha_0 = 4$, $\alpha_1 = 3$, $\frac{F}{M} = 1$.

Alors

$$432000 \frac{T}{2} = 39289^{\text{sec.}},45.$$

Comparons les résultats obtenus.

Un balancier partant d'une position $\alpha_0 = 4$ et recevant une impulsion d'une force dont le moment est $F = 1$ dans la position $\alpha_1 = 1$ et qui agit jusqu'à la position $\alpha_1 = 0$ marquant la fin de la demi-oscilllation descendante, subit une différence de marche de 205,6 secondes par jour, soit $3^m 25^s,6$.

Un balancier partant d'une position $\alpha_0 = 4$ et recevant une impulsion d'une force dont le moment $F = 1$, agissant depuis α_0 jusqu'à $\alpha_1 = 3$, subit une différence de marche de $43200^s - 39289^s,45 = 3910^s,55 = 65^m 10^s,55$.

Un balancier partant de $\alpha_0 = 4$ et recevant toujours de la même force une impulsion depuis la valeur de $\alpha = \alpha_0$ jusqu'à 0 subit une différence de marche de $5537^s 50 = 92^m.17^s.2$ (en faisant $\alpha_1 = 0$ dans l'équation déjà citée).

839. — Supposons maintenant que la force du moment F agisse depuis α_1 à zéro et faisons varier α_0 en lui donnant successivement toutes les valeurs 1.2.3.4.... Soit $F = 1$ et $M = 1$, $\alpha_1 = 1$.

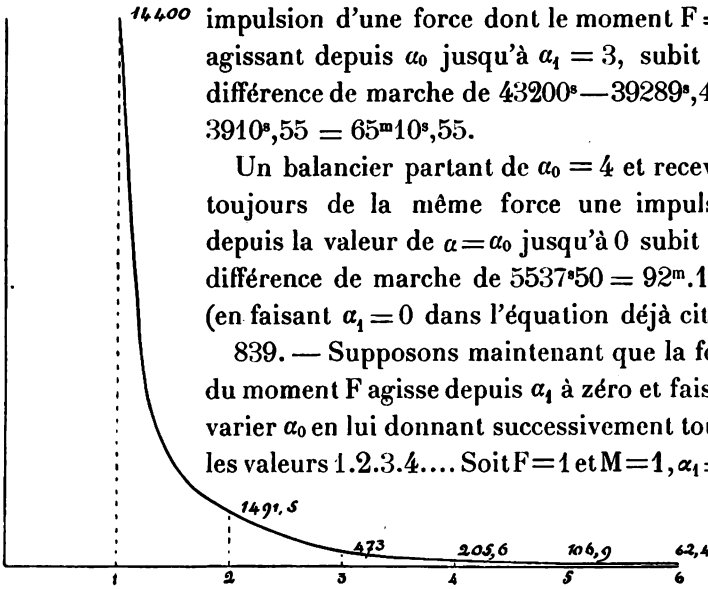


Fig. 266.

1) Pour $\alpha_0 = 1$ $\quad 432000 \sqrt{\frac{A}{M}} \text{arc sin.} \frac{1}{\alpha_0 + 1} = 14400^s.$

2) Pour $\alpha_0 = 2$ $\quad t' + t'' = 1491^s,56.$

3) Pour $\alpha_0 = 3$ $\quad t' + t'' = 473^s 2.$

4) Pour $\alpha_0 = 4$ $\quad t' + t'' = 205^s 6.$

5) Pour $\alpha_0 = 5$ $\quad t' + t'' = 106^s,93.$

6) Pour $\alpha_0 = 6$ $\quad t' + t'' = 62^s,399.$

Au moyen des chiffres ci-dessus, on peut construire graphiquement cette fonction en prenant pour abscisses les valeurs de α_0 et pour ordonnées les variations correspondantes en secondes (fig. 266).

Nous pourrons remarquer qu'une force agissant pendant l'oscillation entière produit une très grande variation dans la durée des oscillations et que cette variation diminue quand l'arc supplémentaire augmente. Les chiffres que nous avons obtenus, montrent que la variation produite est approximativement en raison inverse du cube de l'amplitude α_0.

Influence de l'inertie du spiral sur la durée des oscillations et sur leur isochronisme[1]

840. — Nous savons qu'un spiral cylindrique sans courbes extrêmes théoriques ne peut se développer concentriquement. Nous allons baser nos développements sur l'approximation suivante, supposant qu'un tel spiral se développe concentriquement.

Soient :

D la densité de la matière du spiral,

S la section d'un des spires par un plan passant par l'axe du balancier,

L la longueur totale du spiral,

s sa longueur à partir de l'extrémité fixe jusqu'au point considéré,

r_0 le rayon initial du spiral,

r le rayon du spiral déformé,

ω la vitesse angulaire de l'élément ds,

θ l'angle formé par les rayons aboutissant aux deux extrémités,

α l'angle d'écartement du balancier de sa position de repos,

v la vitesse linéaire de l'élément ds.

Le rayon du spiral déformé selon notre hypothèse sera

$$r = \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha}{\theta}}.$$

[1] D'après le mémoire de M. E. Caspari.

L'équation du mouvement s'obtiendra en faisant la somme des moments des forces réellement agissantes et en l'égalant à celle des forces d'inertie. Les forces réellement agissantes se réduisent ici à la force du spiral de moment $\frac{M\alpha}{L}$, c'est-à-dire que

$$\Sigma\, MF = -\frac{M\alpha}{L},$$

où

$$M = \frac{1}{12} E e^3 h.$$

Les forces d'inertie dues au balancier donnent d'abord le terme

$$A \frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

où A est le moment d'inertie du balancier; nous devons encore tenir compte de la force d'inertie du spiral.

Soit dm la masse d'un élément du spiral, le moment de sa force d'inertie sera :

$$(1) \qquad m.r \frac{dv}{dt},$$

$$\text{où } v = r\omega.$$

D'autre part, nous pouvons admettre que le déplacement angulaire d'un point du spiral est proportionnel à sa distance s de l'extrémité fixe. On aura donc :

$$\omega = \frac{s}{L} \cdot \frac{d\alpha}{dt},$$

d'où

$$(3) \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{s}{L} \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

D'ailleurs

$$\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} + \omega\frac{dr}{dt};$$

donc (1)

$$(4) \qquad d.mr\frac{dr}{dt} = d.m\,r^2\frac{d\omega}{dt} + d.m\,r\,\omega\frac{dr}{dt}.$$

La longueur L du spiral ne variant pas, nous avons :

$$L = r(\theta + a) = (r + dr)(\theta + a + da),$$

d'où, en développant les calculs et négligeant les produits $dr.da$:

$$(\theta + a)\, dr = -r da,$$

ou encore:

$$dr = -\frac{r}{\theta + a} d a;$$

de là:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{r}{\theta + a}\frac{da}{dt},$$

et, puisque $dm =$ D.S. ds, il vient pour (4) :

$$d.mr\frac{dv}{dt} = \mathrm{DS}\, r^2 \frac{s\,ds}{\mathrm{L}}\left\{\frac{d^2 a}{dt^2} - \frac{1}{\theta + a}\left(\frac{da}{dt}\right)^2\right\}$$

et alors:

$$\Sigma\, d.mr\frac{dv}{dt} = \int_0^{\mathrm{L}} \frac{\mathrm{DS}.r^2}{\mathrm{L}}\left\{\frac{d^2 a}{dt^2} - \frac{1}{\theta + a}\left(\frac{da}{dt}\right)^2\right\} s\, ds$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{D.S.}r^2}{\mathrm{L}}\mathrm{L}^2\left\{\frac{d^2 a}{dt^2} - \frac{1}{\theta + a}\left(\frac{da}{dt}\right)^2\right\},$$

s étant la variable, et, puisque $\mathrm{DSL} = m$, masse totale du spiral, il vient:

$$\Sigma\, d.mr\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\frac{m.\, r_0^2}{\left(1 + \frac{a}{\theta}\right)^2}\left\{\frac{d^2 a}{dt^2} - \frac{1}{\theta + a}\left(\frac{da}{dt}\right)^2\right\},$$

car

$$r = \frac{r_0}{1 + \frac{a}{\theta}}.$$

L'équation du mouvement deviendra donc:

$$(5)\quad \left\{\mathrm{A} + \frac{1}{2} m r_0^2 \frac{1}{\left(1 + \frac{a}{\theta}\right)^2}\right\}\frac{d^2 a}{dt^2} - \frac{1}{2}\frac{m r_0^2}{\left(1 + \frac{a}{\theta}\right)^2}\frac{1}{\theta + a}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = -\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}} a,$$

Ma désignant, nous le rappelons, le moment de la force du spiral $\frac{1}{12}\mathrm{E}e^3 h$.]

Intégration de l'équation (5).

Posons

$$\frac{m r_0^2}{2 A} = \delta^2, \qquad \frac{M}{A L} = K^2, \qquad 1 + \frac{\alpha}{\theta} = y.$$

L'équation (5) s'écrit ainsi :

$$(6) \qquad \left(1 + \frac{\delta^2}{y^2}\right)\frac{d^2 \alpha}{dt^2} - \frac{\delta^2}{\theta y^3}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + K^2 \theta (y - 1) = 0$$

comme

$$\alpha = \theta (y - 1),$$

il vient :

$$d\alpha = \theta\, dy,$$

d'où

$$\theta\left(1 + \frac{\delta^2}{y^2}\right)\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{\delta^2}{\theta y^3}\theta^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + K^2 \theta (y - 1) = 0,$$

où encore :

$$(7) \qquad \left(1 + \frac{\delta^2}{y^2}\right)\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{\delta^2}{y^3}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + K^2 (y - 1) = 0.$$

Pour simplifier le calcul, posons encore :

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = z;$$

alors :

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{z}. \text{ et } \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dz}{2\, dy},$$

ce qui nous donne pour l'équation (7) la forme :

$$(8) \qquad \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\delta^2}{y^2}\right)\frac{dz}{dy} - \frac{\delta^2}{y^3}\cdot z + K^2 (y - 1) = 0,$$

équation différentielle linéaire et du premier ordre.

Pour l'intégrer, nous emploierons la méthode générale consistant à poser

$$z = uv,$$

d'où

$$\frac{dz}{dy} = u\frac{dv}{dy} + v\frac{du}{dy},$$

ce qui donne pour (8) :

$$(9) \qquad \left\{\frac{1}{2} v \frac{du}{dy}\left(1 + \frac{\delta^2}{y^2}\right) - \frac{\delta^2}{y^3} u v\right\} + \frac{1}{2} u \frac{dv}{dy}\left(1 + \frac{\delta^2}{y^2}\right) + K^2 (y - 1) = 0.$$

Nous disposerons de u et de v de manière à annuler la quantité entre crochets, ce qui conduit à la relation :

$$(10) \qquad \frac{1}{2}\frac{du}{dy}\left(1+\frac{\delta^2}{y^2}\right)=\frac{\delta^2}{y^3}u,$$

ou

$$\frac{du}{u}=2\delta^2\frac{dy}{\left(1+\frac{\delta^2}{y^2}\right)}=2\delta^2\frac{dy}{y(y^2+\delta^2)}.$$

Or,

$$\frac{1}{y(y^2+\delta^2)}=\frac{1}{\delta^2}\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{y^2+\delta^2}\right),$$

donc :

$$\frac{du}{u}=2\frac{dy}{y}-\frac{2y.\,dy}{y^2+\delta^2},$$

d'où

$$l.u.=2\,l.y-l.\,(y^2+\delta^2)$$

l désignant le logarithme naturel; c'est-à-dire aussi :

$$(11) \qquad u=\frac{y^2}{y^2+\delta^2}.$$

L'équation (9) se réduit, à cause de (10), à

$$\frac{1}{2}u\frac{dv}{dy}\left(1+\frac{\delta^2}{y^2}\right)+K^2(y-1)=0.$$

Remplaçons-y u pas sa valeur (11);

il vient :

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{y^2}{y^2+\delta^2}\frac{dv}{dy}\left(1+\frac{\delta^2}{y^2}\right)+K^2(y-1)=0,$$

ou

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{dv}{dy}+K^2(y-1)=0.$$

En intégrant, il vient successivement :

$$dv=-2K^2(y-1)\,dy,$$

ou

$$v=K^2(2y-y^2)+C.$$

Dès lors :

$$(12)\qquad \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = z = uv = \frac{y^2\,K^2}{y^2+\delta^2}\,(2y-y^2)+C\,\frac{y^2}{y^2+\delta^2}.$$

Si $\alpha = \alpha_0$, $y = y_0$, et $\frac{d\alpha}{dt} = 0$,

donc aussi

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

et, par suite,

$$K^2\,(2y_0 - y_0^2) + C = 0,$$

d'où :

$$C = -K^2\,(2y_0 - y_0^2),$$

dès lors :

$$(13)\qquad z = \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{y^2}{y^2+\delta^2}\,K^2\left\{(2y-y^2)-(2y_0-y_0^2)\right\} =$$

$$= \frac{y^2}{y^2+\delta^2}\,K^2\left\{y_0\,(y_0-2)-y\,(y-2)\right\}$$

et, comme

$$1+\frac{\alpha}{\theta} = y, \quad y_0 = 1+\frac{\alpha_0}{\theta}, \quad dy = \frac{d\alpha}{\theta},$$

il vient :

$$\frac{y^2\,K^2}{y^2+\delta^2} = K^2\left(\frac{1}{1+\frac{\delta^2}{y^2}}\right) = K^2\,\frac{1}{1+\frac{\delta^2}{\left(1+\frac{\alpha}{\theta}\right)^2}}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\theta^2}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$$

$$y\,(y-2) = \left(1+\frac{\alpha}{\theta}\right)\left\{\left(1+\frac{\alpha}{\theta}\right)-2\right\} = 1+\frac{\alpha^2}{\theta^2}+2\frac{\alpha}{\theta}-2-2\frac{\alpha}{\theta} = \frac{\alpha^2}{\theta^2}-1$$

On obtient de même :

$$y_0\,(y_0-2) = \frac{\alpha_0^2}{\theta^2}-1.$$

Donc l'équation (13) devient :

$$\frac{1}{\theta^2}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = K^2\,\frac{1}{1+\frac{\delta^2}{\left(1+\frac{\alpha}{\theta}\right)^2}}\left(\frac{\alpha_0^2}{\theta^2}-\frac{\alpha^2}{\theta^2}\right),$$

ou

$$(14) \qquad \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \mathrm{K}^2 \frac{1}{1+\dfrac{\delta^2}{\left(1+\dfrac{\alpha}{\theta}\right)^2}} (\alpha_0{}^2 - \alpha^2).$$

Si $\alpha = \pm \alpha_0$, cette valeur de la vitesse s'annule. Les oscillations sont donc d'égale amplitude de part et d'autre de la position d'équilibre. On tire de là :

$$dt = \frac{1}{\mathrm{K}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0{}^2 - \alpha^3}} \sqrt{1+\frac{\delta^2}{\left(1+\dfrac{\alpha}{\theta}\right)^2}}.$$

Or :

$$\sqrt{1+\frac{\delta^2}{\left(1+\dfrac{\alpha}{\theta}\right)^2}} = \left\{1+\frac{\delta^2}{\left(1+\dfrac{\alpha}{\theta}\right)^2}\right\}^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\left(1+\dfrac{\alpha}{\theta}\right)^2} - \frac{1}{8}\frac{\delta^4}{\left(1+\dfrac{\alpha}{\theta}\right)^4} + \cdots$$

Si $\dfrac{\delta^2}{\left(1+\dfrac{\alpha}{\theta}\right)^2}$ est petit, ce qui est le cas ici, on pourra se limiter aux premiers termes écrits.

D'ailleurs :

$$\frac{1}{\left(1+\dfrac{\alpha}{\theta}\right)^2} = \left(1+\frac{\alpha}{\theta}\right)^{-} = 1 - 2\frac{\alpha}{\theta} + 3\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^2 - 4\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^3 + \ldots\ldots;$$

en se limitant à ces 4 premiers termes :

$$\frac{1}{\left(1+\dfrac{\alpha}{\theta}\right)^4} = \left(1+\frac{\alpha}{\theta}\right)^{-4} = 1 - 4\left(\frac{\alpha}{\theta}\right);$$

donc :

$$\sqrt{1+\frac{\delta^2}{\left(1+\dfrac{\alpha}{\theta}\right)^2}} = \left\{1+\frac{\delta^2}{\left(1+\dfrac{\alpha}{\theta}\right)^2}\right\}^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\delta^2 - \delta^2\left(\frac{\alpha}{\theta}\right) +$$

$$+ \frac{3}{2}\delta^2\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^2 - 2\,\delta^2\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^3 - \frac{1}{8}\delta^4 + \frac{1}{2}\delta^4\left(\frac{\alpha}{\theta}\right),$$

ou

$$\sqrt{1+\frac{\delta^2}{\left(1+\dfrac{\alpha}{\theta}\right)^2}} = \left(1+\frac{\delta^2}{2}-\frac{\delta^4}{8}\right) - \frac{2\alpha}{\theta}\left(\frac{\delta^2}{2}-\frac{\delta^4}{4}\right) + \frac{3\alpha^2\delta^2}{2\,\theta^2} - \frac{4\alpha^3\delta^2}{2\,\theta^3}.$$

Donc :

$$(15)\qquad \int_0^{\frac{T}{4}} dt = \int_0^{\alpha_0} \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}} \left\{ \left(1 + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^4}{8}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{2\alpha}{\theta}\left(\frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^4}{4}\right) + \frac{3\alpha^2\delta^2}{2\theta^2} - \frac{4}{2}\frac{\alpha^3\delta^2}{\theta^3} \right\} d\alpha.$$

Or :

$$1)\int_0^{\alpha_0} \frac{1 + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^4}{8}}{K\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}} d\alpha = \frac{1 + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^4}{8}}{\sqrt{\frac{M}{A}}} \cdot \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}} =$$

$$= \frac{1 + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^4}{8}}{\sqrt{\frac{M}{A}}} \frac{1}{\alpha_0} \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2}} = \frac{1 + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^4}{8}}{\sqrt{\frac{M}{A}}} \cdot \int_0^{\alpha_0} \frac{\frac{d\alpha}{\alpha_0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2}}$$

$$= \frac{1 + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^4}{8}}{\sqrt{\frac{M}{AL}}} \operatorname{arc\ sin}\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)\Bigg|_0^{\alpha_0} = \frac{\pi}{2} \frac{1 + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^4}{8}}{\sqrt{\frac{M}{AL}}}$$

$$2)\int_0^{\alpha_0} \frac{\frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^4}{4}}{\sqrt{\frac{M}{AL}}} \cdot \frac{1}{\theta} \cdot \frac{2\alpha\, d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}} = \sqrt{\frac{AL}{M}} \cdot \frac{1}{\theta}\left(\frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^4}{4}\right) \int_0^{\alpha_0} \frac{2\alpha\, d\alpha}{\alpha_0\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{AL}{M}} \cdot \frac{1}{\theta}\left(\frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^4}{4}\right) \int_0^{\alpha_0} \frac{2\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right) d\alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{AL}{M}}\ \frac{1}{\theta}\left(\frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^4}{4}\right) 2\alpha_0 \int_0^{\alpha_0} \frac{2\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)\frac{d\alpha}{\alpha_0}}{2\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{AL}{M}} \cdot \frac{1}{-}\left(\frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^4}{4}\right) 2\alpha_0 \left(\quad \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{0}\right)^2}\right)\Bigg|_0^{\alpha_0}$$

$$2)\int_0^{\alpha_0}\frac{\frac{\delta^2}{2}-\frac{\delta^4}{4}}{\sqrt{\frac{M}{AL}}}\frac{1}{\theta}\cdot\frac{2\alpha\,d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2-\alpha^2}}=+\sqrt{\frac{AL}{M}}\cdot\frac{1}{\theta}\left(\frac{\delta^2}{2}-\frac{\delta^4}{4}\right)2\,\alpha_0=$$

$$=+\sqrt{\frac{AL}{M}}\cdot\frac{\delta^2\left(1-\frac{\delta^2}{2}\right)}{\theta}\,\alpha_0$$

$$3)\quad\frac{3\delta^2}{2\theta^2}\frac{1}{K}\int_0^{\alpha_0}\frac{\alpha^2\,d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2-\alpha^2}}=\frac{3\,\delta^2}{2\,\theta^2}\frac{1}{K}\int_0^{\alpha_0}\frac{\alpha^2\frac{d\alpha}{\alpha_0}}{\sqrt{1-\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2}}.$$

Posons $\frac{\alpha}{\alpha_0}=x.$

Alors $\alpha=\alpha_0 x.$

$$\frac{3\,\delta^2}{2\,\theta^2}\frac{1}{K}\int_0^{\alpha_0}\frac{\alpha^2\,d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2-\alpha^2}}=\frac{3\,\delta^2}{2\,\theta^2}\frac{1}{K}\,\alpha_0^2\int_0^{1}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Posons $\sqrt{1-x^2}=\sin\beta.$

Alors:

$$x=\cos\beta.$$
$$dx=-\sin\beta\,d\beta.$$

Donc :

$$\int_0^1\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos^2\beta\sin\beta\,d\beta}{\sin\beta}=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2\beta\,d\beta=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1+\cos 2\beta}{2}\,d\beta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}-\frac{d\beta}{2}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos 2\beta}{2}\,d\beta=\frac{\pi}{4}-\frac{\sin 2\beta}{4}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0}=\frac{\pi}{4}.$$

En conséquence :

$$3)\qquad\frac{3\,\delta^2}{2\theta^2}\frac{1}{K}\int_0^{\alpha_0}\frac{\alpha^2 d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2-\alpha^2}}=\frac{3\,\delta^2}{2\,\theta^2}\cdot\sqrt{\frac{AL}{M}}\cdot\alpha_0^2\,\frac{\pi}{4}\cdot=\frac{3\,\delta^2}{8\,\theta^2}\,\pi\alpha_0^2\sqrt{\frac{AL}{M}}$$

$$4)\qquad\frac{4}{2}\,\frac{\delta^2}{K\,\theta^3}\int_0^{\alpha_0}\frac{\alpha^3\,d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2-\alpha^2}}.$$

Posons :

$$\int \frac{\alpha^3\, d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2-\alpha^2}} = (a\alpha^2+b\alpha+c)\sqrt{\alpha_0^2-\alpha^2} + C\int \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2-\alpha^2}};$$

Dérivons :

$$\frac{\alpha^3}{\sqrt{\alpha_0^2-\alpha^2}} = (2a\alpha+b)\sqrt{\alpha_0^2-\alpha^2} \mp \frac{(a\alpha^2+b\alpha+c)\,2\alpha}{2\sqrt{\alpha_0^2-\alpha^2}} + \frac{C}{\sqrt{\alpha_0^2-\alpha^2}}.$$

Chassons les dénominateurs :

$$\alpha^3 = (2a\alpha+b)(\alpha_0^2-\alpha^2) - (a\alpha^2+b\alpha+c)\,\alpha + C.$$

Egalons, dans les deux membres, les coefficients de mêmes puissances de α. Il vient :

α^3	$1=-2a-a=-3a$	$a=-\frac{1}{3}$
α^2	$0=-2b$	$b=0.$
α^1	$0=2a\alpha_0^2-c=-\frac{2\alpha_0^2}{3}-c$	$c=-\frac{2\alpha_0^2}{3}$
α^0	$0=b\alpha_0^2+C$	$C=0.$

On pourra donc écrire :

$$\int_0^{\alpha_0} \frac{\alpha^3\, d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2-\alpha^2}} = \left(-\frac{\alpha^2}{3}-\frac{2\alpha_0^2}{3}\right)\sqrt{\alpha_0^2-\alpha^2}\,\Bigg|_0^{\alpha_0} = \frac{2}{3}\alpha_0^3$$

et

$$(4) \qquad \frac{4}{2}\frac{\delta^2}{K\theta^3}\int_0^{\alpha_0} \frac{\alpha^3\, d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2-\alpha^2}} = \frac{4}{2}\frac{\delta^2}{K\theta^3}\cdot\frac{2}{3}\alpha_0^3 = \frac{4}{3}\frac{\delta^2}{\theta^3}\alpha_0^3\sqrt{\frac{AL}{M}}.$$

Donc $\frac{T}{2}$ sera donné par la somme des intégrales (1) à (4) prises avec le signe qui leur convient d'après l'équation (15).

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{AL}{M}}\left(1+\frac{\delta^2}{2}-\frac{\delta^4}{8}\right) - \frac{\delta^2\left(1-\frac{\delta^2}{2}\right)}{\theta}\alpha_0\sqrt{\frac{AL}{M}} + $$
$$+\frac{3}{8}\frac{\delta^2}{\theta^2}\alpha_0^2\,\pi\sqrt{\frac{AL}{M}} - \frac{4}{3}\frac{\delta^2}{\theta^3}\alpha_0^3\sqrt{\frac{AL}{M}}.$$

Si l'on avait intégré de $-\alpha_0$ à 0, on aurait obtenu :

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{AL}{M}}\left(1+\frac{\delta^2}{2}-\frac{\delta^4}{8}\right) + \frac{\delta^2\left(1-\frac{\delta^2}{2}\right)}{\theta}\alpha_0\sqrt{\frac{AL}{M}} + $$
$$+\frac{3}{8}\frac{\delta^2}{\theta^2}\alpha_0^2\,\pi\sqrt{\frac{AL}{M}} + \frac{4}{3}\frac{\delta^2}{\theta^3}\alpha_0^3\sqrt{\frac{AL}{M}}.$$

Par suite, en additionnant :

$$(16) \qquad T = \pi \sqrt{\frac{AL}{M}} \left(1 + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^4}{8}\right) + \frac{3}{4}\frac{\delta^2}{\theta^2}\alpha_0^2 \pi \sqrt{\frac{AL}{M}} =$$

$$= \pi \sqrt{\frac{AL}{M}} \left\{ \left(1 + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^4}{8}\right) + \frac{3}{4}\frac{\delta^2}{\theta^2} \cdot \alpha_0^2 \right\}.$$

C'est la durée d'une oscillation simple.

841. — *Remarque.* M. Jules Andrade (Besançon) a donné en 1903 [1] une autre forme à l'équation différentielle de départ (5) de cette théorie. Il signalait deux causes de divergences entre M. Caspari et lui, dont l'une se ramenait à une inadvertance, — de peu d'importance, nous allons le voir — et dont l'autre était due, selon M. Caspari, à un double emploi de forces d'inertie.

L'inadvertance est la suivante.

La quantité de mouvement est

$$mv = m\rho\omega.$$

Son moment est

$$m\rho\omega . \rho = m\rho^2\omega.$$

et sa dérivée

$$(1) \qquad m\left(\rho^2 \frac{d\omega}{dt} + 2\rho\omega\frac{d\rho}{dt}\right);$$

c'est l'expression obtenue par M. Andrade. M. Caspari avait pris directement la dérivée de $m\rho\omega$, qui est

$$m\left(\rho\frac{d\omega}{dt} + \omega\frac{d\rho}{dt}\right),$$

et l'avait ensuite multipliée par ρ, ce qui donnait :

$$(2) \qquad m\left(\rho^2\frac{d\omega}{dt} + \rho\omega\frac{d\rho}{dt}\right).$$

On voit que les expressions (1) et (2) décèlent une divergence équivalente à l'omission du facteur 2, ainsi que l'a fait remarquer M. Andrade. D'ailleurs, étant donnée l'approximation que nous avons supposée au début de cette étude, cette omission a peu d'importance ; d'autre part, l'équation ainsi obtenue est beaucoup plus facile à traiter que celle de

[1] Note sur les perturbations de l'isochronisme et le principe des moments. Besançon 1903 (Extrait de la *France horlogère*).

M. Andrade, laquelle exige deux développements en série. Il faut ne pas perdre de vue non plus que ce que nous voulons calculer est moins l'effet exact des forces en jeu que l'ordre des grandeurs de cet effet.

Quant au second point, il est plus grave. M. Andrade pense que la dérivée du moment des quantités de mouvement doit être égale à la réaction *dynamique* du point fixe du spiral et non à sa réaction *statique*, ce qui revient à ajouter au terme $-\frac{M\alpha}{L}$ du second membre la réaction des forces d'inertie du spiral sur l'appui. M. Caspari, appliquant strictement le théorème de d'Alembert, pense, avec M. Appell, qu'il est déjà tenu compte de cet effet par l'introduction de ces forces d'inertie dans le premier membre.

Remarquons qu'en calculant le coefficient d'avance aux petits arcs d'après les formules données par M. Caspari et par M. Andrade, on trouve des nombres qui sont sensiblement dans le rapport de 3 (Caspari) à 5 (Andrade), page 21 de son Mémoire.

Applications numériques de l'équation (16)

Nous allons appliquer la formule (16) à divers exemples qui nous permettront d'en tirer des enseignements intéressants pour la pratique.

842. — 1er *cas*. Supposons que l'amplitude α_0 soit infiniment petite. Son carré sera négligeable et la formule (16) se réduit à

$$T = \pi \sqrt{\frac{AL}{M}} \left(1 + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^4}{8}\right).$$

Pour une montre dont le balancier exécute 18000 oscillations par heure, on a :

$$\pi \sqrt{\frac{AL}{M}} = 0^s,2.$$

Calculons δ. Nous avions posé précédemment, pour abréger,

$$\delta^2 = \frac{m r_0^2}{2A},$$

où

$$m = \text{L.D.S.} = \text{masse du spiral},$$
$$r_0 = \text{rayon du spiral},$$
$$\text{A} = \text{moment d'inertie du balancier}.$$

Supposons ce spiral formé de 10 tours, de rayon $r_0 = 4 \ ^m/_m$, de hauteur $h = 0{,}24 \ ^m/_m$ et d'épaisseur $e = 0{,}07 \ ^m/_m$.

Si l'on prend, pour la densité, D = 8, on aura :

$$\text{poids} = \text{DL}\,e\,h = p = 0.033778 \text{ gr.},$$

$$\text{masse} = \frac{p}{g} = 0{,}000003444,$$

$$\frac{m\,r_0^2}{2} = 0{,}00002755.$$

Le moment d'inertie A du balancier se tire de

$$\text{T} = \pi \sqrt{\frac{\text{AL}}{\text{M}}},$$

d'où

$$\text{A} = \frac{\text{M}}{\text{L}} \cdot \frac{\text{T}^2}{\pi^2}.$$

$$\frac{\text{M}}{\text{L}} = \frac{\frac{1}{12} \cdot \text{E}\,e^3\,h}{\text{L}} = \frac{26000000 \times 0.07^3 \times 0.24}{12 \times 2\pi \times 10 \times 4} = 0{,}709672,$$

d'où

$$\text{A} = 0{,}709672 \times \frac{0.2^2}{\pi^2} = 0.002876 \text{ mm. sec.}^2\text{. gr.}$$

Alors :

$$\delta^2 = \frac{m\,r_0^2}{2\,\text{A}} = 0.0095784.$$

$$\frac{\delta^2}{2} = 0.004789$$

$$\frac{\delta^4}{8} = 0.00001147.$$

Donc :

$$1 + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^4}{8} = 1{,}004777$$

et

$$\text{T} = \pi \sqrt{\frac{\text{AL}}{\text{M}}} \left(1 + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^4}{8}\right) = 0^s.2 \times 1{,}0047777 = 0^s{,}2009556.$$

Le balancier battant 18000 oscillations par heure, il en battra

$24 \times 18000 = 432000$ en 24 heures.

Leur durée sera $432000 \times 0^s,2009556 = 86812.8$ sec.

Normalement on devrait en avoir $= 86400.$

Retard en 24 heures $= 412^s.8 = 6^m 52^s,8.$

L'inertie du spiral produit par conséquent un retard appréciable, même quand les amplitudes sont très petites.

843. — 2e *cas*. Le balancier est en tous points semblable à celui du cas précédent. A cela près, cependant, que le spiral compte 5 tours au lieu de 10 pour la même longueur. On obtiendrait alors, comme précédemment :

$$1 + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^4}{8} = 1,0189734$$

et

Durée des 432000 oscillations $= 88039.3$ sec.

Durée normale $= 86400$ sec.

Retard en 24 h. $= 1639^s,3 = 27^m 19^s.3,$

c'est-à dire environ 4 fois plus que dans le premier. On en conclut que le *retard est très approximativement proportionnel au carré du rayon des spires.*

C'est ce qui explique le fait, observé en pratique, que, lorsqu'on agrandit un spiral plat non trempé, en le chauffant par exemple, la montre retarde.

Ce même fait se présente quand on agrandit le tour extérieur d'un spiral plat.

844. — 3e *cas*. Comme on peut régler une montre en adaptant à son balancier un spiral de plus ou moins grande largeur, à la condition que son moment M demeure invariable, nous pouvons nous proposer le problème suivant.

Quelle sera la variation du retard ci-dessus quand la longueur du spiral variera ?

Supposons un spiral de 20 tours, de 4 $^m/_m$ de rayon (1er cas) et $h = 0,24\ ^m/_m$. On doit avoir

$$\frac{M}{L} = \frac{\frac{1}{12} E . e^3 h}{L} = \frac{\frac{1}{12} E\, e'^3 h}{2L}$$

d'après nos conditions relatives à M, e' désignant la nouvelle épaisseur du spiral, c'est-à-dire

$$\frac{e'^3}{2} = e^3,$$

d'où

$$e' = e\sqrt[3]{2}.$$

Nous avions (1er cas): $e = 0.07$ m/m. Donc

$$e' = 0{,}088195 \text{ m/m}.$$

et, comme

$$p' = \mathrm{DL}eh \text{ et } \mathrm{L} = 2\pi \times 4 \times 20,$$

il vient :

$$m = 0{,}0000086775$$

$$\frac{\delta}{2} = 0.012068$$

$$\frac{\delta^4}{8} = 0.0000728; \text{ alors :}$$

$$1 + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^4}{8} = 1{,}0119953$$

$$\mathrm{T} = 0^s.2 \times 1{,}0119953 = 0{,}20239906.$$

Durée des 432000 oscillations = 87436.4 sec.
Durée normale = 86400

Retard en 24 heures = $1036^s{,}4 = 17^m16^s{,}4$.

On voit donc qu'un spiral relativement long produira un plus grand retard. Si ce spiral avait été formé de 10 tours, au lieu de 20, et s'il avait 8 m/m de rayon, au lieu de 4 m/m, on aurait obtenu un retard de plus de 1 heure et 8 minutes dans le même temps.

845. — 4e *cas*. Prenons de nouveau un spiral de 20 tours avec 0.07 m/m d'épaisseur. Faisons varier h de telle sorte que le moment $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}}$ ne varie point. On devra avoir

$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}} = \frac{\frac{1}{12}\mathrm{E}.\,e^3 h}{\mathrm{L}} = \frac{\frac{1}{12}\mathrm{E}.\,e^3 h'}{\mathrm{L}'},$$

L′ étant la nouvelle longueur. Prenons $\mathrm{L}' = 2\mathrm{L}$, $h' = 2h$. La

masse deviendra donc 4 fois plus grande que dans le cas où l'on a L et h avec un rayon identique et le même nombre de tours. Les termes $\frac{\delta}{2}$ et $\frac{\delta^4}{8}$ sont donc influencés dans la même proportion :

$$4\,\frac{\delta}{2} = 4 \times 0.0047892 = 0{,}911568$$

$$4\,\frac{\delta^4}{8} = 4 \times 0.0000114 = 0{,}0000456$$

$$1 + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^4}{8} = 1{,}0191112$$

et

$$T = 0^s.2 \times 1{,}091112 = 0^s{,}20382224.$$

Durée des 432000 oscillations $= 88051^s{,}2$
Durée normale $= 86400$

Retard en 24 heures $= 1651^s.2 = 27^m 31^s{,}2.$

Ainsi, en augmentant la hauteur de la lame au lieu de l'épaisseur, le retard croît.

846. — 5e *cas*. Dans les calculs qui précèdent, nous avons admis que A restait invariable, c'est-à-dire que nous avions à faire au même balancier. On peut se demander si le retard occasionné par l'inertie du spiral demeure invariable quelle que soit la grandeur du balancier.

Imaginons un balancier dont toutes les dimensions soient doublées. Le poids de ce balancier deviendra 8 fois plus grand et son rayon de giration 2 fois. Le moment d'inertie deviendra $8 \times 2^2 = 32$ fois plus grand. Le moment de la force du spiral devra aussi devenir 32 fois plus grand. Si nous admettons que r_0 double, on devra avoir

$$32\,\frac{M}{L} = \frac{\frac{1}{12}\,E\,e^3\,h}{L} \times 32 = \frac{\frac{1}{12}\,E\,e'^3\,h}{2\,L},$$

en convenant de faire varier l'épaisseur e et de donner une longueur double au spiral. On devra donc avoir :

$$e' = e\sqrt[3]{32},$$

c'est-à-dire

$$e' = 0{,}222236\ {}^{m}/_{m}.$$

Il suit de là :

$$\frac{\delta^2}{2} = 0{,}0076024$$

$$\frac{\delta^4}{8} = 0{,}00002889$$

et

$$1 + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^4}{8} = 1{,}0075735\,;$$

donc

$$T = 0^s{,}2 \times 1{,}0075735 = 0^s{,}20151471$$

Durée des 432000 oscillations = 87054.3 sec.
Durée normale = 86400

Retard en 24 heures = $654^s.3 = 10^m54^s{,}3$.

Dans le 1er cas nous avions obtenu un retard de $6^m 50^s{,}8$. Le retard produit par l'inertie du spiral serait donc plus considérable pour une grande montre que pour une petite.

847. — 6e *cas*. Jusqu'ici, nous avons supposé l'amplitude des oscillations infiniment petite. Reprenons le spiral du premier cas et supposons au balancier une amplitude d'oscillation de $1\,{}^1/_2$ tours. Nous aurons donc :

$$\alpha_0 = \frac{3}{2}\pi,$$

et l'équation complète (16) sera :

$$T = \pi\sqrt{\frac{AL}{M}}\left\{\left(1 + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^4}{8}\right) + \frac{3}{4}\frac{\delta^2}{\theta^2}\alpha_0{}^2\right\},$$

ou

$$\theta = 10 \times 2\pi.$$

On aura

$$\frac{\alpha_0}{\theta} = \frac{3\pi}{2.\,10.\,2\pi} = \frac{3}{40}. \qquad \frac{\alpha_0{}^2}{\theta^2} = \frac{9}{1600}$$

$$\text{et, si } \delta^2 = \frac{mr_0{}^2}{2A} = 0{,}0095784,$$

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{\delta^2}{\theta^2}\alpha_0{}^2 = 0{,}000040409.$$

Donc :

Durée T_1 des 432000 oscillations due à ce terme

$$T_1 = 43200.\ \pi \sqrt{\frac{AL}{M}}.\ 0{,}000040409,$$

$$\text{soit } T_1 = 3^s491.$$

En conséquence, lorsque l'amplitude des oscillations, au lieu d'être infiniment petite, croît jusqu'à la valeur de 1 ½ tour, l'inertie du spiral fera retarder la montre d'environ 3 ½ sec. en 24 heures de plus que dans le premier cas.

Répétons le même calcul pour une amplitude d'oscillation de 1 tour :

$$\alpha_0 = \pi$$

$$\frac{\alpha_0}{\theta} = \frac{1}{20} \qquad \left(\frac{\alpha_0}{\theta}\right)^2 = \frac{1}{400} \qquad \frac{3}{4}\frac{\delta^2 \alpha_0{}^2}{\theta^2} = \frac{3}{1600}\delta^2.$$

Retard T_1 dû à ce terme $= 432000\ \pi \sqrt{\frac{AL}{M}} \frac{3}{1600} \delta^2$

$$T_1 = 1^s{,}552, \text{ en 24 heures.}$$

Le retard produit par l'inertie du spiral diminue donc d'environ 2 secondes lorsque l'amplitude de l'oscillation varie de 1 ½ à 1 tour.

848. — 7e *cas*. Reprenons le même calcul en nous basant sur les dimensions du spiral agrandi du 2e cas.

Admettons que $\alpha_0 = \frac{3\pi}{2}$ (1 ½ tour).

On a

$$\theta = 5 \times 2\pi$$

$$\frac{\alpha_0}{\theta} = \frac{3\pi}{2.\ 5.\ 2\pi} = \frac{3}{20} \qquad \left(\frac{\alpha_0}{\theta}\right)^2 = \frac{9}{400}$$

$$\frac{3}{4}\left(\frac{\alpha_0}{\theta}\right)^2 \delta^2 = \frac{27}{1600}\delta^2.$$

Retard T_1 dû à ce terme

$$432000.\ \pi \sqrt{\frac{AL}{M}} \cdot \frac{27}{1600}\delta^2 = 55^s{,}86 \text{ en 24 heures.}$$

Dans les grandes amplitudes, le retard dû à ce terme devient donc considérable dès que le spiral est très grand, puisqu'il est plus fort de 55^s,86 que dans le 2e cas.

Si $\alpha_0 = \pi$,

$$\frac{\alpha_0}{\theta} = \frac{\pi}{10\pi} = \frac{1}{10}. \quad \left(\frac{\alpha_0}{\theta}\right)^2 = \frac{1}{100} \quad \frac{3}{4} \cdot \frac{\alpha_0^2}{\theta^2} \delta^2 = \frac{3}{400} \delta^2.$$

Retard T_1 dû à ce terme en 24 heures

$$T_1 = 432000\,\pi \sqrt{\frac{AL}{M}} \cdot \frac{3}{400} \delta^2 = 24^s,82.$$

On voit ainsi que, lorsqu'on a des montres dont la tendance est au retard dans les petites amplitudes, il est avantageux d'employer des spiraux de diamètre relativement grand. Les horlogers anglais ont toujours mis de grands spiraux dans leurs montres, celles-ci ayant le balancier au dessus du mouvement (genre Boston). Il faut remarquer que, dans ce cas, les courbes extrêmes doivent être très exactement exécutées, sans quoi les différences de marche dans les quatre positions verticales deviennent considérables.

Remarquons encore que le balancier qui nous a servi à établir notre calcul, a un moment d'inertie assez faible et que le rayon de 8 m/m. est bien grand pour un tel balancier.

849. — 8e *cas*. Reprenons le balancier du 5e cas, dont toutes les dimensions ont été supposées doublées. Nous aurons,

si $\alpha_0 = \frac{3\pi}{2}$ et $\theta = 2\pi \times 10$:

$$\left(\frac{\alpha_0}{\theta}\right)^2 = \frac{9}{1600}, \quad \frac{3}{4}\left(\frac{\alpha_0}{\theta}\right)^2 \delta^2 = \frac{27}{6400} \delta^2.$$

Par suite :

Retard T_1 dû à ce terme en 24 heures.

$$T_1 = 432000\,\pi \sqrt{\frac{AL}{M}} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{\alpha_0}{\theta}\right)^2 \delta^2 = 5^s,542.$$

Si $\alpha_0 = \pi$, $\left(\frac{\alpha_0}{\theta}\right)^2 = \frac{1}{400}$, $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{\alpha_0}{\theta}\right)^2 \delta^2 = \frac{3}{1600} \delta^2$

et

Retard T_1 dû à ce terme en 24 heures

$$T_1 = 432000\,\pi \sqrt{\frac{AL}{M}} \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{\alpha_0}{\theta}\right)^2 \delta^2 = 2^s,463.$$

On voit que, dans les grandes pièces, l'influence de l'inertie du spiral se manifeste d'une manière plus sensible que dans

les petites, mais qu'en somme la différence des durées entre les grandes et les petites oscillations n'est pas beaucoup plus considérable. Pour terminer, ajoutons encore que, malgré ce que nous avons dit en terminant le 7e cas, il faut être très prudent en plaçant des spiraux relativement grands, car ces spiraux sont sujets à un tremblement qui peut devenir nuisible à la marche normale de la montre.

THÉORIE DE LA COMPENSATION

850. — Lorsqu'on expose une montre dépourvue de compensation à des variations de température, on observe un changement assez considérable dans sa marche. En ce qui concerne le sens de ces variations corrélatives, l'expérience a montré qu'une élévation de la température produit un retard et qu'inversement une avance est occasionnée par un abaissement de la température. Il y a donc une inégalité due aux effets de la chaleur sur ce système ; ces effets sont principalement la dilatation du métal constituant le spiral et le balancier, et la variation du coefficient d'élasticité du spiral. Ces deux phénomènes feront naturellement varier la durée des oscillations.

Rappelons que la durée T d'une oscillation du balancier, à la température ambiante invariablement choisie comme température de référence, est donnée par la relation

$$T = \pi \sqrt{\frac{A}{M}},$$

où A désigne le moment d'inertie du balancier, M le moment élastique du spiral dû à une rotation $\alpha = 1$ du balancier à partir de sa position d'équilibre. Nous savons du reste que, par définition,

$$A = m\,R^2.$$

où m est la masse et R le rayon de giration du balancier.

Quand la température varie, la masse demeure invariable; par contre, la valeur du rayon de giration n'est plus la même. Nous allons calculer cette variation.

851.— Soit ε le coefficient de dilatation du métal dont on fait le balancier, $\pm n$ le nombre de degrés dont a varié la température à partir de la valeur de départ. Le rayon de giration R_T sera devenu, après l'échauffement ou le refroidissement,

$$R(1 \pm n\varepsilon).$$

Par suite, A prendra la nouvelle valeur

$$A' = m R^2 (1 \pm n\varepsilon)^2.$$

Le moment de la force du spiral a aussi subi une variation que nous allons déterminer. A cet effet, admettons que la section droite de la lame du spiral soit un rectangle d'épaisseur e et de hauteur h. Soit L la longueur du spiral et E le module d'élasticité de la matière dont il est fait. Le moment à la température de t degrés, considérée comme température de départ, est :

$$M = \frac{\frac{1}{12} E e^3 h}{L}.$$

Quand la température varie, les dimensions du spiral changent. Si le métal dont il est constitué est le même que celui du balancier, son coefficient de dilatation sera également ε et nous pourrons écrire, après la variation de température, que L est devenue

$$L(1 \pm n\varepsilon).$$

Il en est de même pour les autres dimensions de la lame. On peut par suite poser que le moment de la force élastique du spiral deviendra, par le fait d'une variation de température de $\pm n$ degrés :

$$M' = \frac{\frac{1}{12} E' e^3 (1 \pm n\varepsilon)^3 h (1 \pm n\varepsilon)}{L(1 \pm n\varepsilon)},$$

puisqu'un corps se dilate ou se contracte suivant ses trois dimensions et que le coefficient d'élasticité E à la température de t degrés prendra à la température de $t \pm n$ degrés une autre valeur E', qui reste à déterminer.

852.— Examinons maintenant ce qu'il advient du moment d'inertie de la section du spiral quand la température varie.

Le moment d'inertie d'un élément de cette surface ayant son centre à la distance v de l'axe de la section totale sera

$$d\,I_1 = D.\,dh.\,dv.\,v^2,$$

D désignant la densité du métal dont est formée la lame. Le moment total de la demi-section sera :

$$I_1 = \int\int D.\,dh.\,dv.\,v^2 = D\,h\,\frac{v^3}{3}\Big|_0^{\frac{e}{2}},$$

ou, puisque $v = \frac{1}{2}\,e$,

$$I_1 = D\,h\,\frac{e^3}{3 \times 8}.$$

Le moment relatif à la section entière sera

$$I = 2\,I_1 = D\,h\,\tfrac{1}{12}\,e^3.$$

Si la température varie, h et e subiront des dilatations ; la densité D varie également et prend la valeur

$$\frac{D}{(1 \pm n\varepsilon)^2},$$

de telle sorte que, si e^3 devient $e^3\,(1 \pm n\varepsilon)^3$ et h, $h\,(1 \pm n\varepsilon)$, on a

$$I = \frac{D}{(1 \pm n\,\varepsilon)^2} \cdot h\,(1 \pm n\,\varepsilon)\,\tfrac{1}{12}\,e^3\,(1 \pm n\,\varepsilon)^3 = \tfrac{1}{12}\,D h e^3\,(1 \pm n\,\varepsilon)^2.$$

853. — Nous aurons donc, pour le temps T′ d'une oscillation du balancier à la température de $t + n$ degrés :

$$T' = \pi\sqrt{\frac{m\,R^2\,L_0\,(1 + n\,\varepsilon)}{E' \cdot \frac{h}{12} \cdot e^3}},$$

où E′ désigne la nouvelle valeur du coefficient d'élasticité.

Mais

$$T = \pi\sqrt{\frac{m\,R^2\,L_0}{E \cdot \frac{1}{12} \cdot e^3 \cdot h}};$$

alors

$$\frac{T}{T'} = \frac{\pi\sqrt{\dfrac{m\,R^2\,L_0}{E \cdot \frac{1}{12} \cdot e^3 \cdot h}}}{\pi\sqrt{\dfrac{m\,R^2 \cdot L_0\,(1 + n\,\varepsilon)}{E'\,\frac{1}{12} \cdot e^3 \cdot h}}} = \sqrt{\frac{E'}{E\,(1 + n\,\varepsilon)}},$$

d'où

$$T' = T\sqrt{\frac{E(1 + n\varepsilon)}{E'}}.$$

Si E' était égal à E, c'est-à-dire si le coefficient d'élasticité ne variait pas avec la température, on aurait simplement

$$T' = T\sqrt{1 \pm n\varepsilon}.$$

Si $\varepsilon = 0{,}0000115$ pour l'acier, on aurait, en faisant $n = 1$,

$$T' = 86400{,}5,$$

ce qui veut dire que, si le coefficient d'élasticité ne variait pas, une montre exposée à une température supérieure de 1 degré à la moyenne *avancerait* d'une demi-seconde en 24 heures. Or l'expérience montre que la variation par degré centigrade est de 10 secondes, ce qui nous fait voir que E ne reste pas invariable.

Pour compenser cette variation, nous en introduisons une autre de même grandeur, mais de signe contraire. Elle déterminera donc une avance si la température augmente, et un retard si la température diminue.

Pour savoir quels sont les facteurs que nous pouvons faire varier pour réaliser cette compensation, il nous suffira de discuter l'équation qui nous donne la durée des oscillations T. On a obtenu

$$T = \pi\sqrt{\frac{m\ R^2\ L}{E \cdot \frac{1}{12} \cdot e^3 . h}}.$$

854. — Les seuls facteurs qui se laissent influencer par des variations de température et dont nous puissions nous servir pour modifier la période d'oscillation, sont la longueur L du spiral et le rayon de giration R du balancier.

En faisant varier la première grandeur, on fut conduit autrefois à imaginer le « compensateur » : c'était une lame bi-métallique vissée par l'une de ses extrémités sur la raquette ; l'autre extrémité revenait sur celle-ci. Par l'effet de la température, cette lame se courbait et modifiait le jeu de la partie externe du spiral plat entre les goupilles de la raquette. Le « compensateur » ainsi constitué était parfois employé dans

des montres à cylindre. Il avait deux défauts : le premier, c'est qu'il n'était pas réglable ; le second, c'est que le jeu de la lame du spiral produisait une variation dans la marche de la montre entre les positions horizontales et verticales.

Cette même compensation pouvait s'obtenir aussi en raccourcissant ou en allongeant la partie active du spiral, selon la température, par l'intermédiaire d'une lame bi-métallique faisant tourner la raquette dans l'un ou l'autre sens. Mais il fallait pour cela que la raquette fût très libre, ce qui entraînait d'autres défauts.

Ces deux façons de compenser les effets de la température furent abandonnées à cause des résultats peu satisfaisants qu'elles fournissaient. Elles furent avantageusement remplacées par celle que caractérise l'emploi du *balancier compensateur*.

La serge de ce balancier est une lame bi-métallique, coupée en deux endroits diamétralement opposés. Par suite de cette disposition, lorsque la température s'élève, les parties libres de la serge se rapprochent du centre d'oscillation et diminuent le rayon de giration du balancier ; lorsque la température s'abaisse, il se produit un effet contraire.

La théorie du balancier compensateur reposant sur celle des lames bi-métalliques, nous allons exposer cette dernière d'après les mémoires fondamentaux qu'ont publiés à ce sujet des analystes renommés.

Théorie des lames bi-métalliques.

855. — Supposons données deux barres métalliques, l'une $abcd$ en laiton (fig. 267), l'autre $bgcf$ en acier, de même longueur que la précédente à la température moyenne ; plaçons-les l'une au-dessus de l'autre de telle façon que les extrémités ab et bg touchent un obstacle qui les empêche de se déformer de ce côté ; si nous élevons la température, les extrémités libres subiront un déplacement, toujours très petit d'ailleurs, produit par la dilatation. On observe que la

barre de laiton qui se trouve en haut, s'allonge plus que celle d'acier; on a en effet pour les coefficients de dilatation :

$$\varepsilon' = 0{,}0000115 \text{ pour l'acier,}$$

$$\varepsilon'' = 0{,}00001875 \text{ pour le laiton.}$$

Les extrémités *d* et *c* prendront les positions *d'* et *c'*, tandis que les extrémités *c* et *f* de la barre d'acier viendront en c_1 et *f'*.

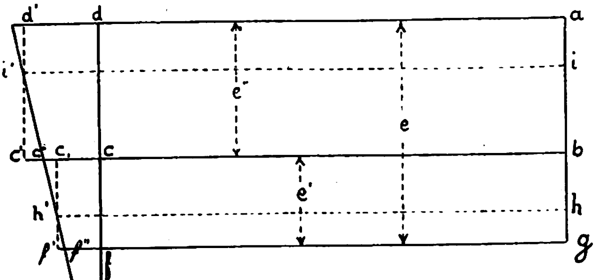


Fig. 267.

Mais, si ces barres sont soudées ensemble, elles ne pourront pas glisser l'une sur l'autre ; le point *c*, étant commun aux deux barres avant la déformation, le sera encore après, de telle sorte que la déformation finale devra incliner la face extrême des barres suivant la droite *d''f''*, qui fait un angle *α* avec le prolongement de *ag*.

On voit qu'il doit y avoir des fibres s'allongeant plus que ne l'exigerait la simple dilatation et que, inversement, il doit s'en trouver d'autres se contractant plus que la simple contraction. D'autres, par contre, ne subiront que l'effet de la dilatation simple : ce sont les fibres *ii'* et *hh'*. Toutes les fibres situées entre *ii'* et *ad'* et entre *hh'* et *bc'* prennent un excès d'allongement, tandis que celles qui sont comprises entre *ii'* et *bc'*, *hh'* et *gf'*, subissent une contraction.

Nous supposons, pour plus de simplicité, que la lame bimétallique est rectiligne à la température ambiante. Mais les mêmes effets se produisent quand la lame est curviligne, pourvu que l'on envisage, dans ce dernier cas, un élément infiniment petit de la serge. Nous considérerons principalement la forme circulaire telle que nous la trouvons dans le balancier.

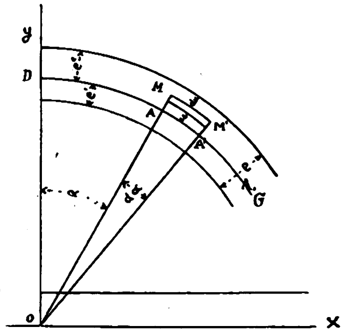
Toute cette théorie a été développée par Yvon Villarceau dans un mémoire publié au tome VII des Annales de l'Obser-

vatoire de Paris (1863). C'est à ce mémoire que nous nous reportons pour tous les développements qui ne pourraient pas trouver place ici.

856. — Soit (fig. 268) DG une lame bi-métallique ayant en DG la surface de contact des lames qui la composent, e' l'épaisseur de la lame intérieure en acier, e'' celle de la lame extérieure en laiton, et posons

$$e' + e'' = e$$

pour l'épaisseur totale de la lame de largeur invariable l. Menons en deux points A et A' pris sur la surface de séparation des lames partielles les normales AO et A'O se coupant en un point O qui est le centre de courbure de la ligne AA_1 au point A quand le point A' s'en rapproche indéfiniment.



Fig, 268.

Considérons l'élément MM' de l'une des lames compris entre les normales précédentes et situé à la distance u de la surface de séparation AA_1. Soit du son épaisseur comptée dans le sens des rayons croissants. Si la longueur MM' est désignée par σ', AA' par σ et le rayon de courbure du filet AA' par ρ à une température θ, on a évidemment, d'après la figure,

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{\rho + u}{\rho} = 1 + \frac{u}{\rho}.$$

On aura de même, à une autre température θ_0,

$$\frac{\sigma'_0}{\sigma_0} = 1 + \frac{u_0}{\rho_0}.$$

Quand la température passe de la valeur θ_0 à la valeur θ, chaque filet subit un allongement. Nous désignerons par ε' l'allongement proportionnel de MM' et par ε celui du filet AA'. La relation fondamentale des dilatations se traduit alors par les égalités.

$$\sigma' = \sigma_0'(1 + \varepsilon')$$

et

$$\sigma = \sigma_0 (1 + \varepsilon),$$

d'où l'on tire

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{\sigma'_0}{\sigma_0} \frac{(1+\varepsilon')}{(1+\varepsilon)}.$$

Et, si l'on se sert des valeurs que nous avons trouvées pour les rapports $\frac{\sigma'}{\sigma}$ et $\frac{\sigma'_0}{\sigma_0}$, il viendra, en remplaçant :

$$1 + \frac{u}{\rho} = 1 + \frac{u_0}{\rho_0} \cdot \frac{(1+\varepsilon')}{(1+\varepsilon)}$$

ou

$$\frac{1 + \frac{u}{\rho}}{1+\varepsilon'} = \frac{1 + \frac{u_0}{\rho_0}}{1+\varepsilon},$$

ou encore, en effectuant les calculs :

$$1 + \varepsilon + \frac{u}{\rho} + \varepsilon \frac{u}{\rho} = 1 + \varepsilon' + \frac{u_0}{\rho_0} + \varepsilon' \frac{u_0}{\rho_0},$$

d'où

$$\frac{u}{\rho} + \varepsilon \left(1 + \frac{u}{\rho}\right) = \varepsilon' \left(1 + \frac{u_0}{\rho_0}\right) + \frac{u_0}{\rho_0};$$

et alors

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon \left(1 + \frac{u}{\rho}\right) + \frac{u}{\rho} - \frac{u_0}{\rho_0}}{1 + \frac{u_0}{\rho_0}}.$$

Les quantités $\frac{u}{\rho}$, $\frac{u_0}{\rho_0}$, ε, ε' sont très petites. Envisageons-les comme étant du premier ordre de petitesse ; la dilatation proportionnelle $\frac{u - u_0}{u_0}$ sera du même ordre et la différence $u - u_0$ sera du second ordre. Nous négligerons pour l'instant les quantités de cet ordre, ce qui donnera pour l'équation précédente :

$$(1) \qquad \varepsilon' = \varepsilon + u\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right).$$

Soit, pour le filet à la distance u de la ligne de séparation des deux lames : T la tension longitudinale par unité de surface de la section transversale, E le module d'élasticité, γ le cœfficient de dilatation. La tension exercée sur le filet M M'

est alors $T l.du$, l étant la longueur. Il résulte de cette tension un allongement égal à l'excès de l'allongement ε' sur celui $\gamma(\theta - \theta_0)$ qui est dû à la simple dilatation ; ce qui fait qu'on pourra poser :

$$T.\, l.\, du = E\,[\varepsilon' - \gamma\,(\theta - \theta_0)]\; l\, d\, u$$

ou, en se servant de (1),

$$(2) \qquad T\, l.\, du = E\left[\varepsilon - \gamma\,(\theta - \theta_0)\right] l\, du + E\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) l.u\, du.$$

Pour avoir la tension totale suivant la direction des filets, il faudra faire la somme de cette tension élémentaire entre les limites $u = -e'$ à $u = +e''$ et l'intégrale obtenue sera nulle si l'on se rapporte à l'une des conditions de l'équilibre, pourvu toutefois que la partie de la lame bimétallique comprise entre le plan normal Ac et son extrémité libre A ne soit soumise à l'action d'aucune autre force extérieure que les tensions précédentes.

Nous désignerons par E′ et γ' les cœfficients relatifs à la lame intérieure (acier), et par E″, γ'' ceux relatifs à la lame extérieure (laiton). Nous aurons ainsi

$$\int_{-e'}^{+e''} T\, l\, du = \int_{-e'}^{+e''} E\left[\varepsilon - \gamma\,(\theta - \theta_0)\right] l\, du + E\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) l u.du.$$

On remarquera que, de $-e'$ à 0, nous avons à faire à la lame de laiton, de 0 à $+e''$ à la lame d'acier. Il est tout indiqué, dans ce cas, de décomposer l'intégrale $\int_{-e'}^{+e''}$ en une somme de deux intégrales, telles que

$$\int_{-e'}^{+e''} T\, l.\, du = \int_{-e'}^{0} T\, l.\, du + \int_{0} T\, l.\, du.$$

Nous opérerons de même dans le second membre. On donnera dans chacune de ces intégrations aux cœfficients E et γ, les valeurs convenant aux deux sortes de métaux. On est ainsi conduit au résultat suivant, après suppression du facteur commun l :

$$(3) \quad \varepsilon(E''e'' + E'e') - (\theta - \theta_0)(E''e''\gamma'' + E'e'\gamma') + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)(E''e''^2 - E'e'^2) = 0,$$

puisque nous savons que l'intégrale est nulle.

Multiplions maintenant (2) par u. Ce premier nombre représentera le moment de la tension T $l.du$ par rapport à un axe perpendiculaire au plan des $x\,y$ et passant par le point A. En outre des tensions précédentes, aucune autre force extérieure n'agit sur l'élément que nous considérons ; la condition d'équilibre sera donc que la somme des moments en question soit nulle. En intégrant entre les mêmes limites que ci-dessus, il viendra, tous calculs faits ;

$$(4) \frac{1}{2}\varepsilon(E''e''^2 - E'e'^2) - \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)(E''e''^2\gamma'' - E'e'^2\gamma') + \\ + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)(E''e''^3 + E'e'^3) = 0.$$

Si nous éliminons ε entre cette équation (4) et la précédente (3), on trouve

$$0 = \tfrac{1}{2}(\theta - \theta_0)\left[(E''e''^2 - E'e'^2)(E''e''\gamma'' + E'e'\gamma') - \right. \\ \left. - (E''e'' + E'e')(E''e''^2\gamma'' - E'e'^2\gamma')\right] + \\ + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)\left[\tfrac{1}{3}(E''e'' + E'e')(E''e''^3 + E'e'^3) - \tfrac{1}{4}(E''e''^2 - E'e'^2)^2\right].$$

Si nous effectuons les calculs, qui n'offrent aucune difficulté, nous obtenons le résultat suivant :

$$0 = \tfrac{1}{2}(\theta - \theta_0)\, e\, E'e'E''e''(\gamma' - \gamma'') + \tfrac{1}{12}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) \\ \left[4e^2 E'e'E''e'' + (E''e''^2 - E'e'^2)^2\right],$$

car nous posons

$$e' + e'' = e.$$

Convenons encore d'écrire, pour simplifier,

$$h = \frac{2}{3}\frac{e}{\gamma'' - \gamma'}\left[1 + \frac{(E''e''^2 - E'e'^2)^2}{4e^2 E''e''E'e'}\right].$$

L'équation précédente prend alors la forme

$$(5) \qquad \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{\theta - \theta_0}{h}.$$

En effet, nous pouvons la diviser par E′ e' E″ e'', elle devient successivement ;

$$0=\frac{1}{2}(\theta-\theta_0)e(\gamma'-\gamma'')+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)\left[4e^2+\frac{(E''e''^2-E'e'^2)^2}{E'e'E''e''}\right]$$

$$0=\frac{(\theta-\theta_0)(\gamma'-\gamma'')}{e}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)\left[1+\frac{(E''e''^2-E'e'^2)^2}{4e^2E'e'E''e''}\right]$$

ou

$$\frac{(\theta-\theta_0)(\gamma''-\gamma')}{e}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)\left[1+\frac{(E''e''^2-E'e'^2)^2}{4e^2E'e'E''e''}\right],$$

d'où

$$(\theta-\theta_0)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)\frac{e}{\gamma''-\gamma'}\left[1+\frac{(E''e''^2-E'e'^2)^2}{4e^2E'e'E''e''}\right],$$

c'est-à-dire

$$\frac{\theta-\theta_0}{h}=\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}$$

selon nos conventions d'écriture,

857. — L'équation (5) est fondamentale. Elle nous permettra de calculer la déformation de la lame pour une variation de température $(\theta-\theta_0)$ déterminée, pourvu que l'on connaisse les valeurs de h. Cette expression ne dépend que de la différence des coefficients de dilatation des lames composantes, de leur épaisseur et du rapport de leurs modules d'élasticité. On voit, d'après cette relation (5), que la déformation est d'autant plus grande que la quantité h sera plus petite. Cette indication nous sera utile. Il suffira, en effet, d'égaler à zéro le second terme de la parenthèse de h pour avoir la valeur h_1 correspondant à la déformation maximum. Nous sommes ainsi conduits à la condition

$$E''e''^2-E'e'^2=0,$$

d'où

$$(6)\qquad \frac{e'}{e''}=\sqrt{\frac{E''}{E'}}.$$

Suivant G. Wertheim, on trouve

$$E'=20\,000\,000\,\frac{\text{gr.}}{\text{mm}^2}\qquad E''=10\,000\,000\,\frac{\text{gr.}}{\text{mm}^2},$$

d'où

$$\sqrt{\frac{E''}{E'}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{1,414},$$

d'où

$$(6^a), \qquad e'' = 1{,}414\, e' \text{ ou } 1{,}5\, e',$$

car le module d'élasticité du laiton dépend de son martelage.

La relation (6) signifie que la lame bimétallique doit être faite de deux lames telles que, l'épaisseur totale étant prise pour unité, celle de la lame d'acier soit $\frac{2}{5}$ et celle de laiton $\frac{3}{5}$. Le laiton dominera donc.

Si l'équation (6) est satisfaite, h se réduit à la valeur h_1 :

$$h_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{e}{\gamma'' - \gamma'}.$$

Si la température diffère de $\pm n$ degrés de la moyenne, on aura

$$(6^b) \qquad \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{\pm n}{\frac{2}{3} \frac{e}{\gamma'' - \gamma}} = \frac{3}{2e}(\gamma'' - \gamma')\, n$$

car alors

$$(\theta - \theta_0) = \pm n.$$

d'où

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{3}{2e}(\gamma'' - \gamma')\, n + \frac{1}{\rho_0}$$

ou

$$(7) \qquad \rho = \frac{\rho_0}{1 \pm \frac{3}{2e}(\gamma'' - \gamma')\, n\, \rho_0}.$$

D'après cette équation, la déformation sera d'autant plus forte que les métaux employés auront des cœfficients de dilatation plus différents l'un de l'autre et que l'épaisseur e de la lame sera petite.

Ainsi, pour une lame acier-laiton, nous avons

$$\gamma'' - \gamma' = 0{,}00001875 - 0{,}0000115 = 0{,}00000725\,;$$

pour une lame acier-nickel (invar) — laiton,

$$\gamma'' - \gamma' = 0{,}00001875 - 0{,}00000100 = 0{,}00001775.$$

Les équations (6) et (7) pourront servir à calculer les épaisseurs respectives des lames partielles pour des métaux autres que l'acier et le laiton habituellement employés, mais en se

basant toujours sur les résultats obtenus avec des balanciers laiton-acier.

Ainsi la pratique nous a fourni, pour l'épaisseur de la lame acier-laiton, la dimension

$$e = 0{,}08\,\rho_0,$$

ρ_0 étant le rayon du balancier sur la ligne de séparation des métaux. Introduisons cette valeur de e dans l'équation du rayon. Il vient

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \frac{3}{0{,}16}\,n\,(\gamma'' - \gamma')}.$$

On peut aussi, de l'équation (7), tirer e, ce qui donne

$$e = \frac{\frac{3}{2}(\gamma'' - \gamma')\,n.\,\rho_0}{\rho_0 - \rho} = 0{,}08\,\rho_0.$$

858. — Essayons maintenant de résoudre un problème intéressant. Connaissant l'épaisseur e d'une lame bimétallique en acier-laiton, déterminer l'épaisseur e_1 d'une lame en invar-laiton dont la déformation maximum due à la variation de température soit la même que pour la première [1].

Nous savons que la condition de déformation maximum est représentée par la relation

$$\frac{e'}{e''} = \sqrt{\frac{E''}{E'}}.$$

Si cette relation est satisfaite, la grandeur que nous avons précédemment appelée h par abréviation, se réduit à la valeur

$$h_1 = \frac{2}{3}\,\frac{e}{\gamma'' - \gamma'}.$$

Il s'agit ici d'une lame d'épaisseur e en acier-laiton, γ'' étant le cœfficient de dilatation du laiton et γ' celui de l'acier. Pour une lame d'épaisseur e_1 invar-laiton, on aura

$$h_2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{e_1}{\gamma''},$$

car γ'' ne change pas, et γ' est pratiquement nul d'après les

[1] Nous supposons, pour simplifier, que le module d'élasticité de l'invar est égal à celui de l'acier. Il est en réalité plus faible, ce dont il faudrait tenir compte pour résoudre complètement le problème; mais il ne s'agit ici que d'un exemple.

propriétés de l'invar. Si nous voulons que les deux lames soient équivalentes au point de vue de la déformation maximum, il faudra nécessairement que

$$h_1 = h_2$$

ou

$$\frac{e}{\gamma'' - \gamma'} = \frac{e_1}{\gamma''},$$

c'est-à-dire

$$e_1 = \frac{e''}{\gamma'' - \gamma'} \, e.$$

Ce serait là l'épaisseur cherchée de la nouvelle lame d'invar-laiton.

Pour une montre 19''' (43^{mm}) nous avons $\rho_0 = 8^{mm}$ environ ; si le balancier est en acier-laiton, on aura

$$e = 0{,}08\ \rho_0 = 0{,}08 \times 8 = 0{,}^{mm}64.$$

Pour un balancier invar-laiton nous aurons :

$$e_1 = 0{,}64 \times 2{,}5 = 1{,}^{mm}6.$$

Cette augmentation de l'épaisseur permettra, pour une même masse, de réduire la hauteur du balancier ou de le munir de moins de vis réglantes.

Remarqûons que le rayon $\rho_0 = 8^{mm}$ et le rayon du balancier d'une montre très soignée et dont le mouvement a une hauteur convenable ; rappelons en outre que la valeur

$$e = 0{,}08\ \rho_0$$

convient, pourvu que la relation

$$\frac{e'}{e''} = \sqrt{\frac{E''}{E'}}$$

soit vérifiée, et que de plus nous ayons à faire à un balancier invar-laiton, l'invar étant un alliage de nickel et d'acier mêlés en proportion telle que le cœfficient de dilatation du composé soit nul.

859. — Nous avons désigné par ε l'allongement proportionnel de AA', pour une variation $(\theta - \theta_0)$ de la température; AA', on se le rappelle, fait partie de la ligne de séparation des deux lames. Si nous admettons la relation

$$\frac{e'}{e''} = \sqrt{\frac{E''}{E'}},$$

on en tirera

$$E'' = E' \frac{e'^2}{e''^2}.$$

En substituant cette valeur de E″ dans l'équation donnant ε (3), cette dernière deviendra

$$\varepsilon = \frac{(\theta-\theta_0)(E''e''\gamma''+E'e'\gamma') - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)(E''e''^2 - E'e'^2)}{E''e''+E'e'}$$

et, si l'on y remplace E″ par sa valeur trouvée :

$$\varepsilon = \frac{(\theta-\theta_0)\left(E'\frac{e'^2}{e''^2}e''\gamma''+E'e'\gamma'\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)\left(E'\frac{e'^2}{e''^2}e''^2 - E'e'^2\right)}{E'\frac{e'^2}{e''^2}e''+E'e'}$$

ou

$$\varepsilon = \frac{(\theta-\theta_0)\left[\frac{e'}{e''}\gamma''+e'\gamma'\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right](e'^2 - e'^2)}{\frac{e'^2}{e''}+e'}.$$

Si l'on divise par e' en haut et en bas et si l'on pose $e'+e''=e$, il vient :

$$\varepsilon = \frac{(\theta-\theta_0)(e'\gamma''+e''\gamma')}{e},$$

car le deuxième terme du numérateur s'annule.

D'après ce qui précède,

$$e' = \tfrac{2}{5}\, e \text{ et } e'' = \tfrac{3}{5}\, e :$$

donc

$$\text{(8)} \qquad \varepsilon = \frac{(\theta-\theta_0)(\frac{2}{5}e\gamma''+\frac{3}{5}e\gamma')}{e} = (\theta-\theta_0)(\tfrac{2}{5}\gamma''+\tfrac{3}{5}\gamma').$$

Telle est la valeur de l'allongement proportionnel de l'élément AA′.

860. — Considérons maintenant le filet d'acier en contact avec le laiton et cherchons à déterminer l'excès de son allongement sur celui qui serait uniquement dû à l'effet de la dilatation. Ce dernier est représenté par

$$(\theta-\theta_0)\gamma'.$$

et l'excès sera égal à l'allongement total ε moins l'allongement que nous venons d'écrire, c'est-à-dire

$$p_1 = (\theta-\theta)_0)\,(\tfrac{2}{5}\gamma''+\tfrac{3}{5}\gamma'-\gamma') = (\theta-\theta_0)\,\tfrac{2}{5}\,(\gamma''-\gamma').$$

Nous trouverions de même pour le même excès de la lame de laiton la valeur

$$p_2 = (\theta - \theta_0)\, \tfrac{3}{5}\,(\gamma' - \gamma'').$$

Nous savons que le cœfficient de dilatation γ'' du laiton est plus grand que le coefficient γ' relatif à l'acier. Il suit de là que la différence $(\gamma'' - \gamma')$ est positive, p_1 est donc positif. Il y a allongement pour les éléments de l'acier. p_2 étant négatif, il y a contraction des éléments du laiton.

Dans la fig. 267, l'excès d'allongement du filet d'acier est représenté par la longueur $C''C_1$, et la contraction du filet de laiton par $C'C''$. Déterminons maintenant la contraction que subit le filet d'acier pour lequel nous avons $u = -\tfrac{2}{5}\,e$. C'est donc celui qui appartient à la face interne de la lame bimétallique.

A cet effet, revenons à l'expression (1) de l'allongement ε' d'un élément situé à la distance u de la ligne commune aux deux métaux. Cette expression était

$$\varepsilon' = \varepsilon + u\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right),$$

ρ_0 étant le rayon de courbure de la ligne médiane au point A à la température moyenne θ_0. L'équation (8) nous a donné pour ε la valeur

$$\varepsilon = (\theta - \theta_0)\,(\tfrac{2}{5}\,\gamma'' + \tfrac{3}{5}\,\gamma'),$$

et l'équation (6^b) montrait que

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{3}{2e}\,(\gamma'' - \gamma')\,(\theta - \theta_0).$$

Par suite ε' deviendra

$$(9) \qquad \varepsilon' = (\theta - \theta_0)\left[(\tfrac{2}{5}\,\gamma'' + \tfrac{3}{5}\,\gamma') + u\,\frac{3}{2e}\,(\gamma'' - \gamma')\right].$$

Nous considérons le filet pour lequel

$$u = -\tfrac{2}{5}\,e\,;$$

il vient donc pour ε' :

$$\begin{aligned}\varepsilon' &= (\theta - \theta_0)\left[(\tfrac{2}{5}\,\gamma'' + \tfrac{3}{5}\,\gamma') - \tfrac{2}{5}\,e\,\tfrac{3}{2e}(\gamma'' - \gamma')\right] \\ &= (\theta - \theta_0)\left[\tfrac{6}{5}\,\gamma' - \tfrac{1}{5}\,\gamma''\right].\end{aligned}$$

L'allongement dû uniquement à la température est

$$(\theta - \theta_0)\,\gamma'.$$

La différence,

$$\varepsilon' - (\theta - \theta_0)\gamma' = (\theta - \theta_0)[\tfrac{6}{5}\gamma' - \tfrac{1}{5}\gamma'' - \gamma'] = (\theta - \theta_0)\tfrac{1}{5}(\gamma' - \gamma'')$$

représente la contraction de ce filet, car nous savons que γ' est plus petit que γ''. La différence est donc négative, et nous avons convenu qu'un allongement négatif équivaut à une contraction. Elle est représentée par le segment $f'f''$ sur la figure 267. Effectuons le même calcul relativement au filet de laiton qui appartient à la face externe de la lame bimétallique. Il correspond à la distance

$$u = +\tfrac{3}{5}e,$$

ce qui nous donne pour ε' la valeur

$$\varepsilon' = (\theta - \theta_0)[(\tfrac{2}{5}\gamma'' + \tfrac{3}{5}\gamma') + \tfrac{3}{5}e \cdot \tfrac{3}{2e}(\gamma'' - \gamma')]$$

$$\varepsilon' = (\theta - \theta_0)[(\tfrac{2}{5}\gamma'' + \tfrac{3}{5}\gamma') + \tfrac{9}{10}\cdot\gamma'' - \tfrac{9}{10}\gamma',$$

ou encore

$$\varepsilon' = (\theta - \theta_0)[\tfrac{13}{10}\gamma'' - \tfrac{3}{10}\gamma'].$$

L'allongement dû uniquement à la variation de température est

$$(\theta - \theta_0)\gamma''.$$

La différence,

$$\varepsilon' - (\theta - \theta_0)\gamma'' = (\theta - \theta_0)\left[\tfrac{13}{10}\gamma'' - \tfrac{3}{10}\gamma' - \gamma''\right] = (\theta - \theta_0)\left[\tfrac{3}{10}(\gamma'' - \gamma')\right],$$

représente l'allongement que nous pourrons appeler mécanique ; il est représenté par $d''d'$ dans la figure 267.

Nous remarquons, à l'inspection de cette figure, qu'il doit y avoir, dans la lame, deux filets ne subissant ni contraction ni allongement supplémentaires à l'allongement de dilatation. Ce dernier allongement seul fait varier leur longueur. L'un de ces filets se trouvera dans la lame d'acier et l'autre dans la lame de laiton. Nous allons déterminer leur position exacte. Rien n'est plus aisé. Nous savons en effet que l'allongement proportionnel total ε' d'un filet situé à la distance u de la ligne de séparation des métaux du bilame est donné par l'équation (9)

$$\varepsilon' = (\theta - \theta_0)[(\tfrac{2}{5}\gamma'' + \tfrac{3}{5}\gamma') + u \cdot \tfrac{3}{2e}(\gamma'' - \gamma')].$$

D'autre part l'allongement dû à la dilatation calorifique seule est donnée par

$$(10)\begin{cases} r_1 = (\theta - \theta_0)\,\gamma' & \text{pour la lame d'acier et par} \\ r_2 = (\theta - \theta_0)\,\gamma'' & \text{pour la lame de laiton.} \end{cases}$$

Par conséquent les différences

$$p_1 = \varepsilon' - r_1$$

et

$$p_2 = \varepsilon' - r_2$$

représenteront les allongements ou contractions purement mécaniques des filets considérés. Puisque nous cherchons à déterminer la position des filets pour lesquels il n'y a ni allongement ni contraction mécaniques, il suffira de poser les équations de condition suivantes :

$$p_1 = 0,$$
$$p_2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon' - r_1 = 0,$$
$$\varepsilon' - r_2 = 0,$$

ou, en remplaçant les lettres par leurs valeurs d'après (9) et (10) :

$$(11)\begin{cases} (\theta - \theta_0)\left[(\tfrac{2}{5}\gamma'' + \tfrac{3}{5}\gamma') + u\,\dfrac{3}{2e}(\gamma'' - \gamma') - \gamma'\right] = 0 \\ \text{et} \\ (\theta - \theta_0)\left[(\tfrac{2}{5}\gamma'' + \tfrac{3}{5}\gamma') + u\,\dfrac{3}{2e}(\gamma'' - \gamma') - \gamma''\right] = 0. \end{cases}$$

Chacune de ces deux opérations est satisfaite si l'on pose

$$(\theta - \theta_0) = 0.$$

ou

$$\theta = \theta_0.$$

Cette condition ne nous apprend rien de nouveau, car nous savons bien que, si la température reste normale, il ne se produit aucune déformation calorifique des lames, ni par conséquent de tensions ou pressions résultantes sur les filets. De plus cette relation ne contient pas l'inconnue u. D'ailleurs nous supposons expressément que θ est différent de θ_0. Il

faudra donc formuler la deuxième possibilité contenue dans les équations (11), savoir

$$\left(\tfrac{2}{5}\gamma'' + \tfrac{3}{5}\gamma'\right) + u\tfrac{3}{2e}(\gamma'' - \gamma') - \gamma' = 0$$

et

$$\left(\tfrac{2}{5}\gamma'' + \tfrac{3}{5}\gamma'\right) + u\tfrac{3}{2e}(\gamma'' - \gamma') - \gamma'' = 0.$$

La première est satisfaite si

$$u_1 = -\frac{\tfrac{2}{5}(\gamma'' - \gamma')}{\tfrac{3}{2e}(\gamma'' - \gamma')} = -\tfrac{4}{15}e. = -\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{5}e,$$

ce que l'on peut vérifier en remplaçant u par cette valeur.

La deuxième est satisfaite pour

$$u_2 = \frac{\tfrac{3}{5}}{\tfrac{3}{2e}}\cdot\frac{(\gamma'' - \gamma')}{(\gamma'' - \gamma')} = \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{5}e.$$

Remarquons d'ailleurs que nous avons précédemment trouvé

$$\tfrac{2}{5}e = e',$$

qui est l'épaisseur de la lame d'acier, et

$$\tfrac{3}{5}e = e'',$$

qui est l'épaisseur de la lame de laiton. Il suit de là que

$$(12)\quad \begin{cases} u_1 = -\tfrac{2}{3}e' \\ u_2 = \tfrac{2}{3}e''. \end{cases}$$

Ces relations signifient qu'il se trouve dans l'acier à la distance $u_1 = -\tfrac{2}{3}e'$ de la ligne commune aux deux métaux et dans le laiton à la distance $u_2 = \tfrac{2}{3}e''$ de la même ligne, deux filets pour lesquels la déformation subie est due exclusivement à la dilatation. On voit que ces éléments ne sont pas situés symétriquement de part et d'autre de la ligne médiane. Ce serait le cas si $e' = e''$. Ces filets sont les filets *neutres*.

861. — Nous avons suivi jusqu'ici, pour cette théorie, la voie ouverte par Yvon Villarceau, en admettant que la lame est circulaire à la température normale θ_0, que son centre coïncide avec l'axe du balancier et que la relation

$$\frac{e'}{e''} = \sqrt{\frac{E''}{E'}} \text{ est satisfaite.}$$

Nous allons continuer les calculs en nous basant sur les mêmes suppositions.

Yvon Villarceau n'a pas tenu compte, dans ses calculs, de la dilatation des lames dans le sens de leur épaisseur ; on peut se demander si l'on n'obtiendrait pas, en en tenant compte, une autre expression pour le rayon ρ déformé, et, si c'est le cas, quelle serait leur différence. Nous allons résoudre la question, les notations restant les mêmes que précédemment.

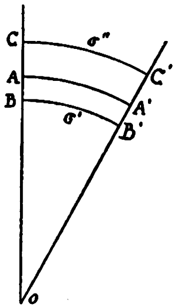


Fig. 269.

AA' est un filet (fig. 269) appartenant à la ligne commune aux deux métaux : son rayon de courbure est ρ_0 à la température θ_0 ; soient CC' le filet neutre du laiton, BB' le filet neutre de l'acier.

Nous avons évidemment, d'après ce que nous savons de la position des filets neutres, la relation

$$\frac{\rho_0 + \frac{2}{3} e_0''}{\rho_0 - \frac{2}{3} e_0'} = \frac{\sigma_0''}{\sigma_0'},$$

d'où

$$(13) \qquad \rho_0 + \tfrac{2}{3} e_0'' = (\rho_0 - \tfrac{2}{3} e_0') \frac{\sigma_0''}{\sigma_0'}.$$

Si la température varie de $\pm n$ degrés à partir de θ_0, on a

$$(\theta - \theta_0) = \pm n$$

et

$$\sigma'' = \sigma_0'' \, (1 \pm n \gamma'')$$
$$\sigma' = \sigma_0' \, (1 \pm n \gamma').$$

De plus

$$\tfrac{2}{3} e'' = \tfrac{2}{3} e_0'' \, (1 \pm n \gamma'')$$
$$\tfrac{2}{3} e' = \tfrac{2}{3} e_0' \, (1 \pm n \gamma')$$

σ_0', σ_0'', e_0', e_0'' désignant des longueurs à la température θ_0 ; ρ_0 devient le rayon ρ que nous cherchons. L'équation (13) devient alors :

$$\rho + \tfrac{2}{3} e_0'' \, (1 \pm n \gamma'') = [\rho - \tfrac{2}{3} e_0' \, (1 \pm n \gamma')] \frac{\sigma_0'' \, (1 \pm n \gamma'')}{\sigma_0' \, (1 \pm n \gamma')},$$

d'où

$$\tfrac{2}{3} e''_0 \, (1 \pm n \gamma'') = \rho \frac{\sigma_0'' \, (1 \pm n \gamma'')}{\sigma_0' \, (1 \pm n \gamma')} - \tfrac{2}{3} e'_0 \frac{\sigma_0'' \, (1 \pm n \gamma'')}{\sigma_0'}.$$

D'ailleurs

$$\frac{\sigma_0''}{\sigma_0'} = \frac{\rho_0 + \frac{2}{3} e_0''}{\rho_0 - \frac{2}{3} \rho_0'},$$

d'où

$$\tfrac{2}{3}(1 \pm n\gamma'')\left[e_0'' + e_0' \frac{\rho_0 + \frac{2}{3}e_0''}{\rho_0 - \frac{2}{3}e_0'}\right] = \rho\left[\frac{\rho_0 + \frac{2}{3}e_0''}{\rho_0 - \frac{2}{3}e_0'} \frac{(1 \pm n\gamma'')}{(1 \pm n\gamma')} - 1\right],$$

d'où enfin

$$(14) \qquad \rho = \frac{\frac{2}{3}(1 \pm n\gamma'')\left[e_0'' + e_0' \frac{\rho_0 + \frac{2}{3}e_0''}{\rho_0 - \frac{2}{3}e_0'}\right]}{\frac{\rho_0 + \frac{2}{3}e_0''}{\rho_0 - \frac{2}{3}e_0'} \frac{(1 \pm n\gamma'')}{(1 \pm n\gamma')} - 1}.$$

Telle est l'expression de ρ dans l'hypothèse d'une variation de l'épaisseur avec la température.

Villarceau avait obtenu (7)

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 \pm \frac{3}{2e_0}(\gamma'' - \gamma')\, n\, \rho_0}.$$

Nous allons calculer la valeur du ρ successivement au moyen de ces deux formules, en prenant pour grandeur à $\theta_0{}^0$ les nombres suivants :

$$\rho_0 = 1000 \text{ centièmes de millimètre}$$
$$e_0 = 0{,}08 \times 1000 = 80$$
$$e_0'' = \tfrac{3}{5}\, 80 = 48$$
$$e_0' = \tfrac{2}{5} \times 80 = 32$$
$$\tfrac{2}{3}\, e''_0 = \tfrac{2}{3}\, 48 = 32$$
$$\tfrac{2}{3}\, e_0' = \tfrac{2}{3}\, 32 = 21{,}333$$
$$\gamma'' = 0{,}00001875$$
$$\gamma' = 0{,}0000115.$$

Admettons que la température varie de $\pm$ 20 degrés et effectuons les calculs suivants (7) et (14). Il viendra :

pour $n = +20$		pour $n = -20$	
suivant (14)	$\rho = 997{,}572$	suivant (14)	$\rho = 1002{,}437$
suivant (7)	$\rho = 997{,}289$	suivant (7)	$\rho = 1002{,}726$
Différence de (14) à (7)	$+ 0{,}283$	Différence de (14) à (7)	$- 0{,}326$

Ainsi donc l'équation (7) nous donne, au chaud, un rayon ρ plus petit que celui que fournit l'équation (14). C'est l'inverse qui se produit au froid.

Du reste nous avons, d'après les données de l'équation (7) (Villarceau) :

$$\text{au froid} \quad \rho - \rho_0 = \quad 2{,}726$$
$$\text{au chaud} \quad \rho - \rho_0 = -2{,}711$$
$$\text{Somme} + 0{,}015\,;$$

et, d'après l'équation (14) (J. Grossmann) :

$$\text{au froid} \quad \rho - \rho_0 = 2{,}437$$
$$\text{au chaud} \quad \rho - \rho_0 = 2{,}428$$
$$\text{Somme} + 0{,}009.$$

Les deux formules nous apprennent donc l'une et l'autre qu'il y a une plus grande variation de ρ au froid qu'au chaud, mais on voit qu'en ce qui concerne la grandeur absolue, ces variations ne sont pas identiques. L'effet de la variation de l'épaisseur e avec la température n'est donc point absolument négligeable. Il s'agit en effet de différences atteignant en moyenne 0,003 $^{m}/_{m}$. Pour apprécier l'importance de cette différence, il faut se rappeler que les moments d'inertie contiennent les carrés des distances. D'ailleurs les résultats obtenus pouvaient être prévus quant au signe, car il est clair qu'au froid les deux filets neutres se rapprochent, ce qui augmente la déformation de la serge; tandis qu'au chaud ils s'éloignent, ce qui diminue la déformation. C'est peut-être là une des causes de « l'anomalie de Dent, plus communément désignée sous le nom d'« erreur secondaire ». Voici en quoi elle consiste.

862. — L'horloger anglais Dent avait constaté que, si l'on réglait un chronomètre de telle façon que les marches au chaud et au froid fussent les mêmes, il y avait une avance de quelques secondes à la température moyenne[1]. Pour corriger cette avance, il faisait usage de spiraux en verre. Après lui, un grand nombre de fabricants de chronomètres de marine ont employé des compensations auxiliaires diverses, revélant une grande ingéniosité. La plupart de ces constructeurs ont fait usage d'un frein pour modérer l'agrandissement

[1] Ferdinand Berthoud avait déjà signalé ce fait en 1775 environ.

de la serge au froid et avoir l'effet contraire au chaud. La figure 270 représente un balancier bimétallique. La ligne $A_0BC_0D_0$ est la ligne de séparation des lames à la température moyenne θ_0 ; son rayon à cette température est ρ_0.

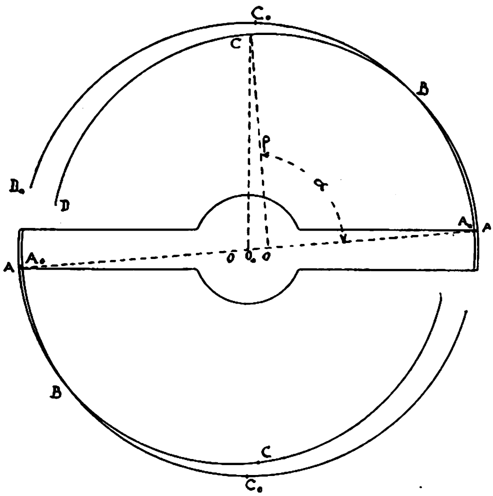


Fig. 270.

Lorsqu'on expose le balancier à une température croissante, ρ_0 prend la valeur ρ que nous avons calculée; le bras du balancier s'allonge aussi, s'il était, r_0 à θ_0 degrés, il devient

$$r = r_0 \,(1 + n\,\gamma')$$

à la température θ, telle que

$$n = \theta - \theta_0.$$

Portons cette longueur r à partir du centre O_0. Nous pouvons admettre que la partie de la serge qui est attachée au bras, ne se courbe pas à cause de la rigidité de cette dernière pièce. Relions maintenant le centre O_0 au point A de la serge où le bras a son origine, et portons à partir de ce point A sur A O_0 une longueur égale à ρ ; nous obtenons le point O autour duquel comme centre, nous décrivons l'arc ABCD de rayon ρ. Cette ligne représente la ligne de séparation des métaux à chaud. Le balancier étant composé de deux parties symétriques par rapport à un diamètre quelconque, des effets également symétriques se produisent de chaque côté de ce diamètre. Il est d'ailleurs évident que, si l'on expose le balancier au froid, ρ devient plus grand que ρ_0 et le centre O, au lieu de se trouver entre A et O_0, se trouvera au delà de O_0.

On voit, en examinant la figure 270, que le point A, dans sa position A_0, s'est éloigné du centre O_0. Il existe un point B qui reste immobile par rapport à O_0. On remarquera que des deux points C et D, le dernier s'est plus rapproché que C du

centre du balancier. Ces particularités nous fourniront les moyens de régler la compensation, c'est-à-dire de faire en sorte que la variation du moment d'inertie du balancier soit égale et de signe contraire à celle du moment de la force du spiral.

863. — On trouve diverses formes de balanciers à lames bimétalliques ; les balanciers circulaires sont généralement à masses ou à vis.

Les balanciers à masses sont le plus souvent employés dans les chronomètres de marine. Sur chaque lame est ajustée, au moyen d'un vis de serrage, une masse que l'on peut faire glisser le long de la serge. Lorsqu'on la rapproche de l'extrémité libre, on augmente l'effet du balancier et, en l'éloignant de ce point, on l'affaiblit.

Ainsi, lorsque la pièce avance plus au froid qu'au chaud, l'effet du balancier est diminué et l'on dit en termes techniques que la « compensation est trop faible » ; il faut donc rapprocher les masses de l'extrémité libre de la lame. Dans le cas contraire, lorsque la pièce avance plus au chaud qu'au froid, il y a une « compensation trop forte » ; il faut alors faire glisser les masses vers les bras.

Pour qu'on puisse opérer de même avec les balanciers à vis, le fabricant perce dans la serge plus de trous taraudés qu'il n'y a de vis, de sorte que l'on peut aussi, selon les exigences de la compensation, rapprocher ou éloigner ces vis de l'une ou l'autre des parties de la serge.

Afin de pouvoir faire un grand nombre de combinaisons par le déplacement des vis, on doit avoir le plus grand nombre de trous possible, mais ces trous doivent être assez éloignés les uns des autres pour qu'on puisse placer des vis l'une à côté de l'autre sans que leurs têtes se touchent.

Soit $2\,r$ le diamètre extérieur de la serge et d le diamètre de la tête de vis, n le nombre de trous que l'on veut percer dans la serge ; on doit avoir, entre ces grandeurs la relation

$$\frac{2\pi r}{d} > n.$$

Remarquons que les masses ainsi que les vis doivent être faites de manière qu'elles ne gênent la déformation de la serge ni au chaud ni au froid. Le dessous des vis ne doit pas être piqué, mais être fait en forme conique, ainsi que l'indique la fig. 271. Les trous de vis à l'extérieur de la serge ne doivent pas être contrepercés; car, si les vis plaquent sur une certaine surface et qu'elles gênent par là la déformation de la serge, il arrive que, par un nombre répété de déformations de cette espèce, la matière est refoulée et que la compensation se renforce.

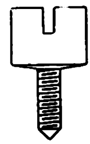


Fig. 271.

864. — On peut se proposer de représenter graphiquement les quantités y dont tous les points de la serge se rapprochent du centre du balancier par l'effet des variations de température. Ces grandeurs y dépendront naturellement de la position du point considéré (fig. 270), c'est-à-dire de la distance $O_0O = x$. Elles dépendront en outre de l'angle $COA = \alpha$, supplémentaire de l'angle COO_0 et qui varie aussi en même temps que x. Désignons par $C_0O_0 = \rho_0$ la distance d'un point C_0 au centre du balancier O_0, à la température θ_0. A chaud, ce point vient en C et sa distance au centre a diminué de la quantité

$$y = \rho_0 - CO_0.$$

C'est CO_0 qu'il nous faut déterminer. Pour cela considérons le triangle CO_0O (fig. 270). Nous connaissons le rayon $\rho = CO$ par les équations que nous avons établies précédemment (14) ou (7). Posons

$$O_0O = x,$$

Il vient :

$$\overline{CO_0}^2 = x^2 + \rho^2 - 2\rho x \cos(COO_0);$$

mais

$$COO_0 = 180^\circ - \alpha \qquad \cos(COO_0) = -\cos\alpha;$$

donc

$$\overline{CO_0}^2 = x^2 + \rho^2 + 2\rho x \cos\alpha$$

et

$$CO_0 = \sqrt{x^2 + \rho^2 + 2\rho x \cos\alpha};$$

donc

$$(15) \qquad y = \rho_0 - \sqrt{x^2 + \rho^2 + 2\,\rho\, x \cos \alpha}$$

Quant à x, c'est une quantité connue, car on a

$$(16) \qquad x = r_0\,(1 + n\,\gamma') - \rho,$$

où r_0 est la longueur à $\theta_0{}^0$ du demi-bras du balancier.

Si maintenant nous faisons varier l'angle α, nous pourrons calculer au moyen de la formule (15) les quantités y relatives à chacun des points tels que C de la serge, car les quantités x sont aussi connues d'après (16). Nous porterons alors les angles α en abscisses sur un système de coordonnées rectangulaires, et en ordonnées les grandeurs y. On obtient ainsi la courbe de la figure 272. Nous allons la discuter pour en tirer des enseignements pratiques.

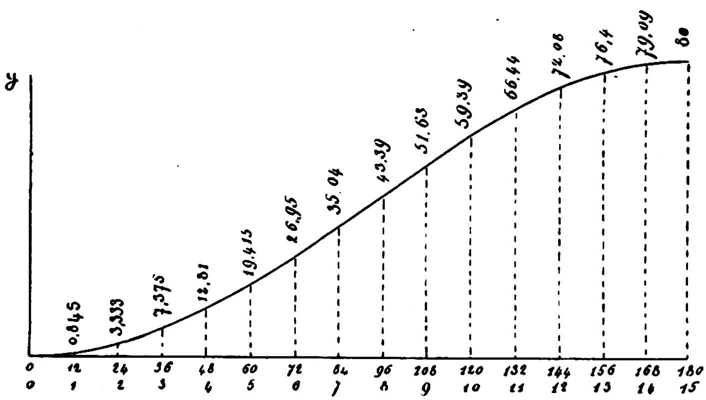


Fig. 272.

Remarquons tout d'abord qu'il y a un maximum des y ; il correspond à la valeur $\alpha = 180°$, car $\cos \alpha = -1$ dans ce cas. La partie négative du second membre de (15) devient alors minimum. Il y a donc un point de la serge qui se rapproche de O plus que tous les autres, ce qui était du reste à prévoir, étant donné la forme de la lame. Ce point correspond, sur le graphique, à la position 15. L'allure générale de la courbe des y est la suivante : elle passe par l'origine des coordonnées, présente d'abord sa convexité à l'axe des x, puis, pour une valeur de α voisine de 90°, lui présente sa concavité. On peut déterminer la valeur exacte de l'angle corres-

pondant au point d'inflexion. Il suffira de poser la condition

$$\frac{d^2 y}{d\alpha^2} = 0.$$

Or,

$$\frac{dy}{d\alpha} = \frac{2\rho x \sin\alpha}{2\sqrt{\rho^2 + x^2 + 2\rho x \cdot \cos\alpha}} = \frac{\rho x \sin\alpha}{\sqrt{\rho^2 + x^2 + 2\rho x \cos\alpha}}.$$

$$\frac{d^2 y}{d\alpha^2} = \frac{\sqrt{\rho^2 + x^2 + 2\rho x \cos\alpha}.\rho x.\cos\alpha + \rho x \sin\alpha \dfrac{2\rho x.\sin\alpha}{\sqrt{\rho^2 + x^2 + 2\rho x \cos\alpha}}}{\rho^2 + x^2 + 2\rho x \cos\alpha}$$

Pour que cette valeur soit nulle, il suffit que son numérateur le soit et l'on pose

$$(\rho^2 + x^2 + 2\rho x \cos\alpha)\,\rho x \cos\alpha + \rho^2 x^2 \sin^2\alpha = 0,$$

ou

$$\cos\alpha\,(\rho^2 + x^2) + \rho x\,(2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = 0,$$

ou encore

$$\cos\alpha\,(\rho^2 + x^2) + \rho x\,(\cos^2\alpha + 1) = 0,$$

car

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1;$$

d'où

$$\cos^2\alpha + \frac{\rho^2 + x^2}{\rho x}\cos\alpha + 1 = 0.$$

C'est une équation du 2me degré en cos α qui devient alors:

$$\cos\alpha = -\frac{\rho^2 + x^2}{2\rho x} \pm \sqrt{\frac{(\rho^2 + x^2)^2}{4\rho^2 x^2} - 1} = -\frac{\rho^2 + x^2}{2\rho x} \pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{(\rho^2 - x^2)^2}{4\rho^2 x^2}} = \frac{-\rho^2 - x^2 \pm (\rho^2 - x^2)}{2\rho x}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\alpha_1 = \dfrac{-\rho^2 - x^2 + \rho^2 - x^2}{2\rho x} = -\dfrac{2x^2}{2\rho x} = -\dfrac{x}{\rho} \\ \cos\alpha_2 = \dfrac{-\rho^2 - x^2 - \rho^2 + x^2}{2\rho x} = -\dfrac{2\rho^2}{2\rho x} = -\dfrac{\rho}{x}, \end{array}\right.$$

c'est-à-dire

$$\alpha_1 = \text{arc cos} - \frac{x}{\rho}$$

$$\alpha_2 = \text{arc cos} - \frac{\rho}{x} = \text{arc cos} - \frac{1}{\dfrac{x}{\rho}}.$$

x étant toujours très petit par rapport à ρ, l'angle α sera toujours voisin de 90°. D'après ce qui vient d'être dit, $\frac{1}{\frac{x}{\rho}}$ sera très grand. Mais comme un cosinus ne peut surpasser la valeur ± 1, la solution α_2 est inutilisable pour notre cas particulier. Le signe — de la valeur de α_1 indique que cet angle sera un peu plus grand que $\frac{\pi}{2}$ si x est positif, c'est-à-dire si l'on a

$$r_0 (1 + n \gamma') > \rho,$$

et un peu plus petit que $\frac{\pi}{2}$ si x est négatif, c'est-à-dire si l'on a

$$r_0 (1 + n \gamma') < \rho.$$

Il est d'ailleurs bien évident que la position de ce point variera selon la température θ.

Supposons que le balancier ait 30 trous. L'éloignement entre deux trous correspond à un angle au centre de 12° ; si nous déplaçons une vis, en même temps que son vis-à-vis, de la position 1 du graphique à la position 2, cette vis se rapprochera du centre du balancier, par l'effet de la température, plus dans la nouvelle position que dans l'ancienne. La différence des rapprochements sera pour un balancier bien déterminé, auquel correspond le nombre de la figure 272 :

$$3{,}333 - 0{,}845 = 2{,}488.$$

Par contre, si nous déplaçons une vis du n° 7 au n° 8, la différence du rapprochement est de

$$43{,}39 - 35{,}04 = 8{,}35.$$

Ainsi l'effet du déplacement d'une vis est tout différent selon la position de cette vis et suivant qu'on la déplace vers le bras, ou vers la coupure, ou encore vers le milieu de la serge. Pour un déplacement donné, les rapprochements résultant seront toujours plus grands dans le voisinage d'une position qui correspond à un angle de 90°.

865. — Nous allons, dans ce qui suit, calculer la valeur de α en fonction de $\alpha_0 = C_0O_0A_0$ (fig. 270), en admettant que OA se confond avec O_0A_0.

A cet effet, considérons le filet neutre du laiton. On sait que c'est le filet qui ne subit que des dilatations dues à la chaleur. A une température θ, on a pour la longueur du filet:

$$L = \alpha_0 (\rho_0 + \tfrac{2}{3} e_0'') (1 \pm n \gamma'').$$

Et comme on a, en général, pour une longueur d'arc

$$L = r\alpha,$$

où r est son rayon, on aura

$$\alpha = \frac{L}{r}.$$

Or, ici, le rayon r de l'arc L sera

$$r = \rho + \tfrac{2}{3} e'' (1 \pm n \gamma''),$$

d'après ce que nous avons vu; donc

$$(17) \qquad \alpha = \alpha_0 \frac{(\rho_0 + \frac{2}{3} e_0'')(1 \pm n \gamma'')}{\rho + \frac{2}{3} e'' (1 \pm n \gamma'')}.$$

Cette équation nous fait connaître α en fonction de grandeurs connues. Nous pourrons, par suite, déterminer CO_0 et, conséquemment, y. Le problème est complètement résolu.

866. Prenons un balancier à masses. Nous supposerons que ces masses se réduisent à deux points matériels et nous ferons

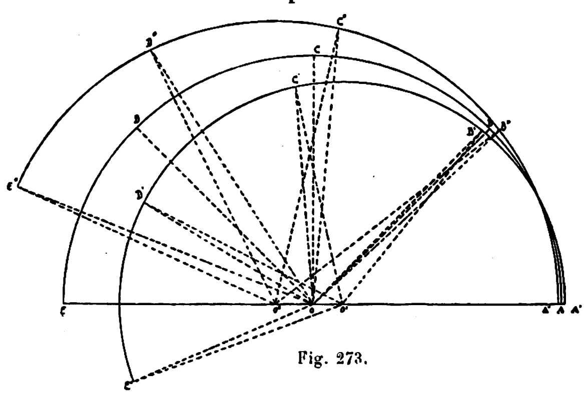


Fig. 273.

abstraction de toute autre masse du balancier ; puis nous nous poserons les questions suivantes.

Existe-t-il des points du balancier où le rapprochement et l'éloignement des masses du centre du balancier se font plus régulièrement qu'en d'autres points ? Pour le savoir, nous avons construit la fig. 273 d'après des calculs numériques. Les

données initiales étaient les angles $\alpha_0 = 0^o, 45^o, 90^o, 135^o, 180^o$ et les grandeurs suivantes :

$$\rho_0 = 100 \ ^m/_m$$
$$n = \pm 1000 \text{ degrés}$$
$$e = 0{,}08.100 = 8$$
$$e'' = \tfrac{3}{5} \cdot 8 = 4{,}8$$
$$e' = \tfrac{2}{5} \cdot 8 = 3{,}2$$
$$\tfrac{2}{3}\, e'' = \tfrac{2}{3} \cdot 4{,}8 = 3{,}2 \text{ fibre neutre du laiton}$$
$$\tfrac{2}{3}\, e' = \tfrac{2}{3} \cdot 3{,}2 = 2{,}1333 \text{ fibre neutre de l'acier}$$
$$n\,\gamma'' = 0{,}01875$$
$$n\,\gamma' = 0{,}0115.$$

La demi-circonférence A B C D E représente la ligne de contact des métaux à la température moyenne θ_0, l'arc A' B' C' D' E' cette même ligne à la température $\theta_0 + 1000$, et A'' B'' C'' D'' E'' sa forme à la température $\theta_0 - 1000$.

Au chaud, le point A_0 est arrivé en A' ; il s'est donc éloigné du centre O_0 du balancier, tandis qu'au froid il est venu en A'' et s'est rapproché du centre. Les points BCDE sont en B' C' D' E' quand la température s'élève, et en B'' C'' D'' E'' quand elle s'abaisse. Nous pouvons ainsi faire les tableaux suivants :

A chaud.

L'angle α_0 =	$BO_0A = 45^o$	L'angle α =	$B'O'A' = 51{,}02177$
	$CO_0A = 90^o$		$C'O'A' = 102{,}04354$
	$DO_0A = 135^o$		$D'O'A' = 153{,}06531$
	$EO_0A = 180^o$		$E'O'A' = 204{,}08708.$

De plus,

$$AO_0 = \rho_0 = 100, \quad A'O_0 = 101{,}15$$
$$B'O_0 = 97{,}24 \qquad C'O_0 = 87{,}776, \quad D'O_0 = 79{,}227$$
$$E'O_0 = 78{,}945.$$

A froid :

L'angle α_0 =	$BO_0A = 45^o$	L'angle α =	$B''O''A'' = 38{,}782$
	$CO_0A = 90^o$		$C''O''A'' = 77{,}564$
	$DO_0A = 135^o$		$D''O''A'' = 116{,}346$
	$EO_0A = 180^o$		$E''O''A'' = 155{,}128$

$\rho_0 = 100$ $A''O_0 = 100\,(1 - n\,\gamma') = 98{,}85$
$B''O_0 = 102{,}73$ $C''O_0 = 112{,}04$ $D''O_0 = 122{,}03$
$E''O_0 = 128{,}6.$

D'après l'équation (14) de J. Grossmann, on aura pour ρ les valeurs suivantes :

pour $n = +\ 1000^0$ $\rho = 89,\ 4666$ $\rho - \rho_0 = -\ 10,\ 533$
pour $n = -\ 1000^0$ $\rho = 114{,}358$ $\rho - \rho_0 = +\ 14{,}358.$
Le balancier s'agrandit donc plus au froid qu'il ne se referme au chaud. C'est ce que nous avons déjà constaté précédemment.

867. — La fig. 274 fait mieux saisir les variations de la valeur de y. Elle a été construite d'après les chiffres contenus dans les tableaux suivants relatifs à $n = +\ 1000^0$ pour le premier et à $n = -\ 1000^0$ pour le second :

pour $n = +\ 1000^0$, il vient formule (15) :

$\alpha_0 = 0$ $A'O - AO_0 = +\ 1{,}15$
$\alpha_0 = 45^0$ $BO_0 - B'O_0 = -\ 2{,}76$
$\alpha_0 = 90^0$ $CO_0 - C'O_0 = -\ 12{,}224$
$\alpha_0 = 135^0$ $DO_0 - D'O_0 = -\ 20{,}773$
$\alpha_0 = 180^0$ $EO_0 - E'O_0 = -\ 21{,}075;$

pour $n = -\ 1000^0$,

$\alpha_0 = 0^0$ $AO_0 - A''O_0 = -\ 1{,}15$
$\alpha_0 = 45^0$ $B''O_0 - BO_0 = +\ 2{,}73$
$\alpha_0 = 90^0$ $C''O_0 - CO_0 = +\ 12{,}04$
$\alpha_0 = 135^0$ $D''O_0 - DO_0 = +\ 22{,}03$
$\alpha_0 = 180^0$ $E''O_0 - EO_0 = +\ 28{,}6.$

La figure 274 nous fait voir que le bras et la partie de la serge comprise entre 0° et 25° environ s'éloignent du centre au chaud et s'en rapprochent au froid. C'est un effet qui doit être compensé par les déformations de la partie restante de la serge munie de masses ou de vis appropriées. Remarquons en outre que, surtout entre 135° et 150°, la serge s'éloigne plus au froid qu'elle ne se rapproche au chaud. C'est donc une nouvelle cause tendant à augmenter ce que nous avons appelé l'erreur secondaire.

Yvon Villarceau dit, dans son admirable travail, qu'il

importe que l'angle α_0 qui détermine la position des masses, soit voisin de 90°. La figure 274 ne fait que confirmer cette règle, car elle nous montre que c'est dans ces parages que les déformations de la serge sont le plus régulières. Le même

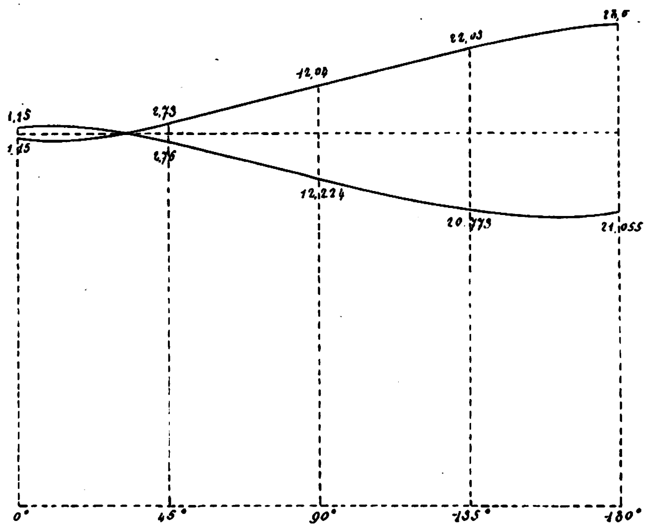


Fig. 274.

auteur ajoute encore qu'il conviendra de diminuer la sensibilité des lames bimétalliques autant que possible, et cela en augmentant simplement leur épaisseur. Il en résultera des avantages notables pour la compensation.

Il s'agit donc d'examiner à quelles conditions on peut employer des lames relativement épaisses en conservant les masses dans des positions voisines de 90°. Il est bien évident que ces lames auront des épaisseurs telles que la relation

$$\frac{e'}{e''} = \sqrt{\frac{E''}{E'}}$$

soit satisfaite (E = module d'élasticité).

C'est une façon de procéder. Des lames plus épaisses auront l'avantage de donner une déformation plus régulière, car les deux fibres neutres sont plus éloignées l'une de l'autre. La figure 274 nous a fait voir que les masses (non pas les masses compensatrices) situées près du bras ne contribuent pas

à compenser l'effet de température, mais doivent au contraire être compensées elles-mêmes.

868. — Un autre moyen de satisfaire aux exigences de la compensation, tout en prenant des lames plus épaisses, est de choisir des lames bimétalliques formées de métaux ayant des coefficients de dilatation très différents l'un de l'autre. Il ne faudrait pas prendre un métal trop mou, le zinc par exemple, qui ne conviendrait point.

Les métaux généralement employés sont l'acier et le laiton, pour lesquels nous avons :

$$\begin{aligned} \text{laiton } \gamma'' &= 0{,}00001875 \\ \text{acier } \gamma' &= 0{,}0000115 \\ \text{différence} &= 0{,}00000725. \end{aligned}$$

Nous avons dit que l'on peut mployer, au lieu d'acier ordinaire, un alliage d'acier et de nickel, dont le coefficient de dilatation est pratiquement nul, ce qui lui a valu le nom d'*invar*. Dans ce cas on aura :

$$\gamma'' - \gamma' = 0{,}00001875 - 0 = 0{,}00001875.$$

Si la lame est formée d'invar et de laiton, on devra, pour obtenir une compensation normale, soit augmenter l'épaisseur des lames, soit reculer les masses du côté du bras dans le but de produire une déformation plus régulière. On peut aussi combiner les deux effets.

Les balanciers (acier nickel-laiton) que l'on a construits dans ces dernières années, sont le plus souvent coupés au milieu de la serge, entre les deux bras. Les masses compensatrices peuvent ainsi être distribuées sous l'arc de 0° à 90°. Mais il est bon de ne pas charger inutilement la partie de la serge qui est voisine du bras.

Le fabricant de balanciers et les régleurs ont ainsi, avec ces lames acier nickel-laiton, le moyen de réaliser une quantité de combinaisons diverses dans le but de combattre l'erreur secondaire.

869. — Il peut y avoir un avantage, dans certains calculs numériques, à n'utiliser que l'un des signes du binôme de dilatation $(1 \pm n\,\gamma)$ à l'exclusion de l'autre, par exemple le

signe +. Alors il faudrait chercher à exprimer le binôme $(1 - n\gamma)$ au moyen de celui que nous désirons employer. Or, on peut poser

$$\frac{1}{1 + n\gamma} = 1 - n\gamma + n^2\gamma^2 - n^3\gamma^3 + \cdots$$

Si $n\gamma$ est très petit, $n^2\gamma^2$ et tous les termes qui suivent, seront absolument négligeables et l'on pourra écrire :

$$\frac{1}{1 + n\gamma} = 1 - n\gamma.$$

C'est précisément la substitution que nous utiliserons dans les expressions du rayon ρ et de a trouvées précédemment, formules (14) et (17).

Supposons donc n négatif, c'est-à-dire que la température s'abaisse à partir de la moyenne. L'expression de ρ devient

$$\rho = \frac{\frac{2}{3}(1 - n\gamma'')\left[e_0'' + e_0' \frac{\rho_0 + \frac{2}{3}e_0''}{\rho_0 - \frac{2}{3}e_0'}\right]}{\frac{\rho_0 + \frac{2}{3}e_0''}{\rho_0 - \frac{2}{3}e_0'} \frac{(1 - n\gamma'')}{(1 - n\gamma')} - 1},$$

et, si nous utilisons la substitution

$$1 - n\gamma'' = \frac{1}{1 + n\gamma''}$$

$$1 - n\gamma' = \frac{1}{1 + n\gamma'},$$

il viendra

$$(14_2)\ \rho = \frac{\frac{2}{3}\frac{\left[e_0'' + e_0' \frac{\rho_0 + \frac{2}{3}e_0''}{\rho_0 - \frac{2}{3}e_0'}\right]}{1 + n\gamma''}}{\frac{\rho_0 + \frac{2}{3}e_0''}{\rho_0 - \frac{2}{3}e_0'} \frac{\frac{1}{1 + n\gamma''}}{\frac{1}{1 + n\gamma'}} - 1} = \frac{\frac{2}{3}\left[e_0'' + e_0' \frac{\rho_0 + \frac{2}{3}e_0''}{\rho_0 - \frac{2}{3}e_0'}\right]}{\frac{\rho_0 + \frac{2}{3}e_0''}{\rho_0 - \frac{2}{3}e_0'}(1 + n\gamma') - (1 + n\gamma'')},$$

expression valable pour n négatif.

On voit l'avantage de cette expression. Supposons que nous ayions calculé ρ pour une valeur positive de n, c'est-à-dire dans le cas d'une élévation de température. Si nous voulons avoir la valeur de ρ pour n négatif, il deviendra inutile de calculer

à nouveau le binôme de dilatation et son logarithme, car il aura gardé la valeur $(1 + n\gamma)$. La disposition des calculs seule change. On gagnera du temps. Il est bon toutefois de se rappeler que cette substitution n'est permise que si $n\gamma$ est petit, c'est-à-dire si son carré est négligeable.

Nous allons montrer quelle est la différence dans les valeurs de ρ obtenues d'après la formule (14), d'abord quand on prend la valeur exacte du binôme de dilatation $(1 - n\gamma)$ et ensuite quand on prend sa valeur approchée $\frac{1}{1 + n\gamma}$ en se servant de la formule (14_2) que nous avons établie pour ce cas. Nous supposerons n égal à $-20°$, par exemple. C'est une valeur très vraisemblable.

On obtient ainsi, pour $n = -20$,
dans le cas du balancier étudié page (340):

1) valeur exacte du binôme $(1 - n\gamma)$,

$$\rho = 1002{,}437 \text{ centièmes de } {}^{m}/_{m}.$$

pour

2) Valeur approchée du binôme $\frac{1}{n + n\gamma}$

$$\rho = 1002{,}500 \text{ centièmes de } {}^{m}/_{m}.$$

Si l'on prenait $n = -1000$, on aurait :

1) valeur exacte du binôme $(1 - n\gamma)$,

$$\rho = 1143{,}58 \text{ centièmes de } {}^{m}/_{m}.$$

pour

2) valeur approchée du binôme : $\frac{1}{1 + n\gamma}$,

$$\rho = 1138{,}34 \text{ centièmes de } {}^{m}/_{m}.$$

On voit qu'ici la différence serait de l'ordre de deux dixièmes de millimètre. D'ailleurs nous avons supposé notre formule (14_2) exacte seulement dans le cas où n est petit, ce qui n'est pas réalisé pour cette valeur de $n = 1000$.

Pour $n = -20°$, la concordance est tout à fait satisfaisante, car la différence ne porte que sur les millièmes de millimètre, qui échappent à la mesure directe. Si donc n et $\leq 20°$, la formule (14_2) peut être employée.

On peut transformer semblablement l'équation (17) donnant α. Pour

$$1 - n\gamma'' = \frac{1}{1 + n\gamma''},$$

elle devient

$$\alpha = \alpha_0 \frac{(\rho_0 + \frac{2}{3} e_0'')}{\rho(1 + n\gamma'') + \frac{2}{3} e_0''}.$$

Si $n = -20^o$,

$$\alpha_0 = 45^0 \qquad \alpha = 38^o{,}967$$
$$\alpha_0 = 135^o \qquad \alpha = 116^o{,}901$$

et

$$O_0D, \text{ pour } \alpha = 135^o, = 121^{\frac{mm}{100}}{,}35 \qquad y = 21^{\frac{mm}{100}}{,}35,$$

au lieu de

$$y = 22^{\frac{mm}{100}}{,}03$$

par la formule exacte.

870. — Donnons encore un exemple d'application des formules précédemment écrites. Il s'agit d'un cas qui peut se présenter dans la pratique courante. Nous prendrons $\rho_0 = 10$ et $n = \pm 20^0$. On trouve

$$\left.\begin{array}{ll} \rho = 10{,}0245 \text{ pour } n = -20. & \rho - \rho_0 = 0{,}0245 \\ \rho = 9{,}9759 \text{ pour } n = +20. & \rho - \rho_0 = 0{,}0241 \end{array}\right\} \text{diff.} = 0{,}0004.$$

On constate donc, comme nous l'avons déjà vu, que le balancier s'agrandit plus au froid qu'il ne se contracte au chaud. Dans la pratique, une masse compensatrice ne peut pas occuper une position éloignée de 180° du bras auquel la lame est fixée; une vis peut occuper une position qui en est éloignée de 135°. Faisons donc $\alpha_0 = 135^0$ et calculons sa valeur α à $\pm n^0$ par l'équation connue :

$$\alpha = \alpha_0 \frac{(\rho_0 + \frac{2}{3} e_0'')(1 + n\gamma'')}{\rho + \frac{2}{3} e_0''(1 + n\gamma'')}.$$

Il vient,

$$\text{pour } n = +20^o, \qquad \underline{\alpha = 135^o{,}374.}$$

Si n est négatif, on sait que la formule peut s'écrire, pour de petites valeurs de $n\gamma''$:

$$\alpha = \alpha_0 \frac{(\rho_0 + \frac{2}{3} e_0'')}{\rho(1 + n\gamma'') + \frac{2}{3} e_0''},$$

où, pour $n = -20$, $\alpha = 134^{\circ},608$. L'angle α_0 varie donc dans le même sens que la température.

871. — Pour terminer ces recherches, nous allons encore calculer la longueur O_0D du rayon de giration R du balancier, C'est ce que nous avons désigné précédemment par l'expression

$$R = \sqrt{\rho^2 + x^2 + 2\,\rho\, x \cos \alpha}\cdot$$

On trouve alors, en se servant des valeurs de ρ et α que nous venons de déterminer aux deux températures $n = +20^{\circ}$ et $n = -20^{\circ}$, et de la valeur de x qui correspond à ces conditions [formule (16) $x = r_0\,(1 \pm n\,\gamma'') - \rho$] :

pour $n = +20^{\circ}$, $R' = O_0D' = 9{,}9575$, $R' + R'' = 20{,}0006$,

pour $n = -20^{\circ}$, $R'' = O_0D'' = 10{,}0431$ $\dfrac{R' + R''}{2} = 10{,}0003$.

Ainsi le rayon moyen $\dfrac{R' + R''}{2}$ a une valeur de 3 dix-millièmes de millimètre supérieure à celle du rayon initial et normal R du balancier.

Si nous multiplions 0,0003 par le nombre 86400 de secondes en 24 heures, nous obtiendrons l'avance en secondes en 24 heures, soit

$$25^{s},92,$$

de la montre à la température moyenne et lorsqu'elle a été réglée aux températures + et — 20°, et en supposant que toute la masse du balancier se trouve concentrée en un point éloigné de 135° du bras du balancier où la lame est fixée. Telle est l'une des causes probables de l'erreur secondaire. La figure 274 montre que cette erreur diminue lorsque les vis ou les masses compensatrices sont davantage rapprochées du bras. On s'efforcera donc de réaliser cette disposition pour diminuer l'erreur secondaire. Elle peut même être annulée complètement si, au lieu d'acier ordinaire, on emploie l'acier-nickel pour la formation de la lame bimétallique.

872. — Nous pouvons donner une forme intéressante de la relation nécessaire pour qu'une compensation soit parfaite. Si T est le temps d'oscillation à une température θ_0, T' sa valeur

à la température θ, nous devrons nécessairement avoir, si la compensation est réalisée :

$$T' = T.$$

Nous avons vu que T s'exprime par

$$T = \pi \sqrt{\frac{m\,L\,R^2}{\frac{1}{12}\cdot E.e^3.h}} = \pi R \sqrt{\frac{m}{\frac{1}{12}\,h}} \sqrt{\frac{L}{E\,e^3}}.$$

Le facteur

$$A = \pi \sqrt{\frac{m}{\frac{1}{12}\cdot h}}$$

ne varie pas avec la température.

Posons

$$Q = \sqrt{\frac{L}{E\,e^3}}$$

pour abréger. Soient Q′R′ les valeurs de Q et R à la température θ. La condition

$$T = T'$$

conduit à la relation

$$A\,Q\,R = A\,Q'\,R'$$

ou

$$Q\,R = Q'\,R'$$

ou encore

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{R'}{R},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\sqrt{\frac{L}{E\,e^3}}}{\sqrt{\frac{L'}{E'\,e'^3}}} = \frac{R'}{R}.$$

Telle est la forme mathématique de la condition d'une compensation parfaite.

873. — Disons encore deux mots de la variation du coefficient d'élasticité E du spiral. On croit que, puisque l'invar ne se dilate pas, son coefficient d'élasticité ne doit pas non plus varier sous l'action de la température. Cette question sera traitée dans le chapitre spécial que nous devons à M. Ch.-Ed.

Guillaume. Nous avons essayé des spiraux en acier-nickel montés sur des balanciers non compensés; ils donnaient une variation de 3^s environ en 24 heures pour une variation de 1 degré de la température. Les spiraux en acier ordinaire trempé, montés sur un balancier de même métal, donnent une variation de 10^s pour la même différence de température. Nous avons pu constater, toutefois, que ces pièces, après avoir marché pendant 6 mois et dans des conditions de température très variées, accusaient un retard dans la marche diurne. Cet effet n'est pas à craindre avec le balancier, car la déformation de ce dernier sous l'action de la température est beaucoup plus petite que celle du spiral.

874. — **Variation du coefficient de dilatation linéaire.** — Le coefficient de dilatation linéaire subit des variations, suivant la nature du métal considéré.

Dans ce qui précède, nous avons pris pour l'acier non trempé des balanciers la valeur suivante du coefficient de dilatation :

$$\gamma' = 0,0000115,$$

qui est une valeur moyenne.

Pour l'acier trempé, soit l'acier des spiraux, on peut prendre

$$\gamma' = 0,00001322,$$

valeur plus grande que pour l'acier non trempé. Nous savons que, pour la construction des lames bimétalliques, il est préférable d'employer deux métaux dont les coefficients de dilatation soient le plus différents possible. Il en résulte que l'acier non trempé est préférable comme métal composant la bilame. Les conditions ne sont plus les mêmes dans le cas des spiraux ; car, alors, ce qui importe, c'est le module d'élasticité du métal. C'est l'acier trempé qui conviendra le mieux.

875. — Nous pouvons ainsi constater que bien des études sont encore nécessaires pour arriver à une connaissance plus parfaite des effets produits par les influences qui modifient l'isochronisme des oscillations du balancier. Nous citerons encore dans cet ordre d'idées les intéressantes expériences de M. Paul Ditisheim pour la détermination de l'influence de la pression atmosphérique sur la marche des chronomètres.

Jules Grossmann, dans sa parfaite modestie, n'a jamais pensé que ses propres études pussent avoir d'autre valeur que celle d'établir une base pouvant servir de point de départ à d'autres recherches.

H. G.



CH.-ED. GUILLAUME
Correspondant de l'Institut de France,
Directeur-adjoint du Bureau International des Poids
et Mesures, à Sèvres (France).

NOTICE

SUR LES

Aciers au nickel

ET LEURS

APPLICATIONS A L'HORLOGERIE

PAR

Ch.-Éd. GUILLAUME
Correspondant de l'Institut de France,
Directeur-adjoint du Bureau international des Poids et Mesures.

876.— L'utilisation des métaux et alliages usuels, doués de propriétés que l'on caractérise suffisamment en les désignant comme normales, avait amené, il y a deux ou trois décades, les régulateurs de l'horloge et du chronomètre au degré de perfection que l'ingéniosité des inventeurs et l'habileté des artistes avaient permis de réaliser, et l'on attendait tout nouveau progrès d'une lente évolution fondée sur une amélioration progressive du détail de ces organismes délicats. Nul alors n'eût pensé qu'il pût exister des groupes d'alliages soustraits à un ensemble de règles auxquelles tous les mélanges de métaux avaient semblé jusqu'alors soumis ; et ce fut, parmi tous ceux que passionnent les problèmes de l'horlogerie, une profonde surprise d'apprendre que de tels alliages sont réalisables, qu'ils ont une valeur industrielle indiscutable, et que leur emploi rationnel est susceptible de modifier profondément les mécanismes horlogers destinés à opposer, à certaines variations thermiques, d'autres variations qui en compensent les effets.

Les propriétés de ces alliages, mélanges intimes de fer, de nickel et de quelques additions métallurgiques peu importantes, sont bizarres et complexes; nous allons les exposer sommairement, et montrer ensuite comment elles peuvent servir à l'amélioration des appareils de mesure du temps.

Propriétés du fer.

877. — Pour imprévues qu'elles soient, les propriétés des aciers au nickel ne sont pas capricieuses ; elles dérivent toutes des anomalies singulières du fer, découvertes il y a quelques années seulement, et qu'il est nécessaire de connaître si l'on veut apprécier logiquement celles de ses alliages.

Aux températures ordinaires, le fer est, comme on sait, le plus magnétique de tous les corps ; mais, lorsqu'on le chauffe, ses propriétés magnétiques s'affaiblissent, lentement d'abord, puis plus rapidement lorsque la température s'approche de 700°. A 775°, la descente devient très brusque, ainsi que l'a montré Pierre Curie, sans cependant que la disparition du magnétisme soit complète. A 890°, une nouvelle chute se produit, et le fer prend les propriétés des corps dans lesquels des mesures délicates peuvent seules déceler des traces de propriétés magnétiques.

Les trois états successifs du fer ont été désignés par M. Osmond comme fer alpha, fer béta et fer gamma, dénominations sous lesquelles ils sont universellement connus.

Le passage d'un état à l'autre s'accompagne d'autres manifestations, faibles entre le fer alpha et le fer béta, intenses lorsqu'on passe au fer gamma. Ainsi, jusqu'au passage à ce dernier état, le fer se dilate suivant une courbe régulière, à courbure assez accentuée, mais ne présentant nulle part de ressaut marqué. Dans le passage au fer gamma, l'accroissement de volume subit un brusque recul, fixé par M. H. Le Chatelier entre 2,5 et 3 mm. par mètre. Ensuite, l'allongement régulier reprend, sous une plus forte inclinaison.

Pour la dilatabilité du fer extra-doux[1], des expériences personnelles m'ont conduit à la formule :

$$l_\theta = l_0 (1 + 0{,}000\ 011\ 334\theta + 0{,}000\ 000\ 007\,39\theta^2),$$

tandis que MM. Holborn et Day ont trouvé, pour l'intervalle 0°.500°, la formule

$$l_\theta = l_0 (1 + 0{,}000\ 011\ 705\theta + 0{,}000\ 000\ 00\,525\theta^2).$$

La seconde formule conduirait, aux températures basses, à une dilatabilité un peu plus élevée que la première, et inversement aux hautes températures; le croisement des deux courbes se produit un peu au-dessous de 180°.

Dans la suite, nous désignerons par α et β les deux termes des formules de dilatation; et, afin de simplifier l'écriture, nous emploierons le mode de représentation suivant, qui traduira la première formule :

$$\alpha = 11{,}334.10^{-6}, \qquad \beta = 0{,}007\ 39.10^{-6}.$$

A mesure qu'on le chauffe, le fer résiste moins à la flexion ; son module d'élasticité diminue, et, comme pour la dilatation, les variations de cette propriété sont représentées par une formule à deux termes, dont le second possède une certaine importance relative. Puis, dans le passage au fer gamma, le module éprouve une brusque augmentation, de telle sorte qu'une barre de fer, portée par deux appuis et fléchie par un poids suspendu en son milieu, se redresse au moment de cette transformation. En fait, un semblable redressement est d'une observation difficile ; la limite élastique du fer étant très basse à cette température, une flexion très faible devient permanente, et le phénomène manque absolument de netteté. Mais on peut conclure de façon certaine à sa réalité, en raison des propriétés des aciers au nickel, qui seraient inexplicables si le fer ne possédait pas la particularité qui vient d'être signalée.

La fig. 1 traduit graphiquement, à deux échelles différentes,

[1] Fer de Suède, en barres de 4 m.

et de façon uniquement démonstrative, ces deux variations du fer (ΔL variation de longueur, ΔE variation du module) et les fixe dans l'esprit.

878. — Pour engendrer les propriétés des alliages qui nous occupent, celles de leur second constituant, le nickel, sont moins importantes que celles du fer ; cependant, le magnétisme du nickel est probablement une condition de la plupart d'entre elles. Le fer et le nickel forment entre eux une solution solide homogène, qui possède, par rapport à ses constituants, certaines des propriétés des solutions salines.

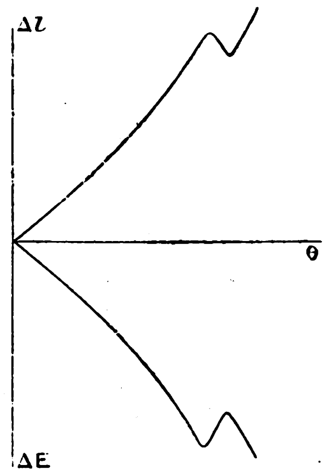


Fig. 1.

Ainsi, l'eau pure se congèle brusquement dans le passage par la température de 0°. Mais, si elle est additionnée d'une petite quantité de sel de cuisine, sa température de congélation s'abaisse et s'étale sur un intervalle plus ou moins étendu. Le sel se concentre dans la partie non congelée, qui finit par se prendre, à une température bien définie, correspondant à la plus basse température de congélation des solutions d'eau et de sel ordinaire.

De même, si l'on ajoute au fer une substance susceptible de constituer avec lui une solution, ses transformations s'abaissent plus ou moins dans l'échelle des températures et deviennent moins nettes. C'est ainsi que le carbone abaisse sa température de fusion, et permet d'obtenir les fontes de moulage ; puis il abaisse également les températures de passage aux états successifs, en modifiant leur caractère.

De même, enfin, le nickel abaisse les transformations du fer, et les étend sur un large espace de températures, dans lequel les propriétés des alliages sont anormales et diffèrent du tout au tout de celles des alliages ordinaires, ainsi que

nous allons le montrer dans une rapide esquisse, en renvoyant, pour une étude plus détaillée, aux publications originales [1].

Propriétés des aciers au nickel.

879. — **Propriétés magnétiques.** — Portons en abscisses (fig. 2) les teneurs en nickel des alliages de ce métal avec le fer;

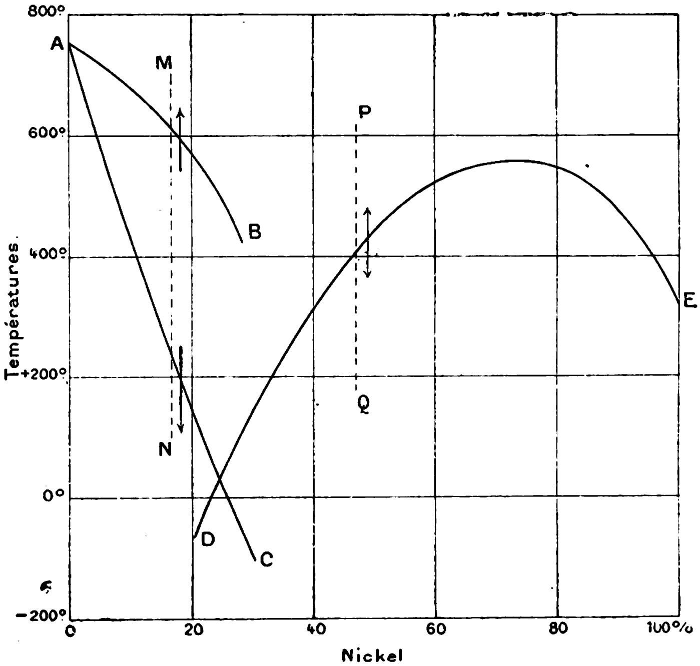


Fig. 2.

le zéro correspondra au fer pur, le 100 au nickel pur; entre ces deux extrêmes, la composition sera centésimale. En ordonnées, nous porterons les températures, et les courbes du diagramme indiqueront l'apparition ou la disparition des propriétés magnétiques pour une teneur et une température déterminées.

Dans la partie gauche, le diagramme se compose de deux courbes distinctes, qui vont en divergeant à partir d'un point;

[1] Ch.-Éd. Guillaume : *Recherches sur le nickel et ses alliages* (Paris, Gauthier-Villars. 1898) et *Les Applications des aciers au nickel* (Ibid. 1904).

à droite, la courbe est unique. C'est qu'en effet, dans les fortes teneurs en nickel, les propriétés magnétiques apparaissent et disparaissent à une même température pour un alliage déterminé; pour les fortes teneurs en fer, au contraire, le magnétisme, qui se manifeste pour la première fois lorsqu'on traverse, à température descendante, la courbe inférieure, n'aban-

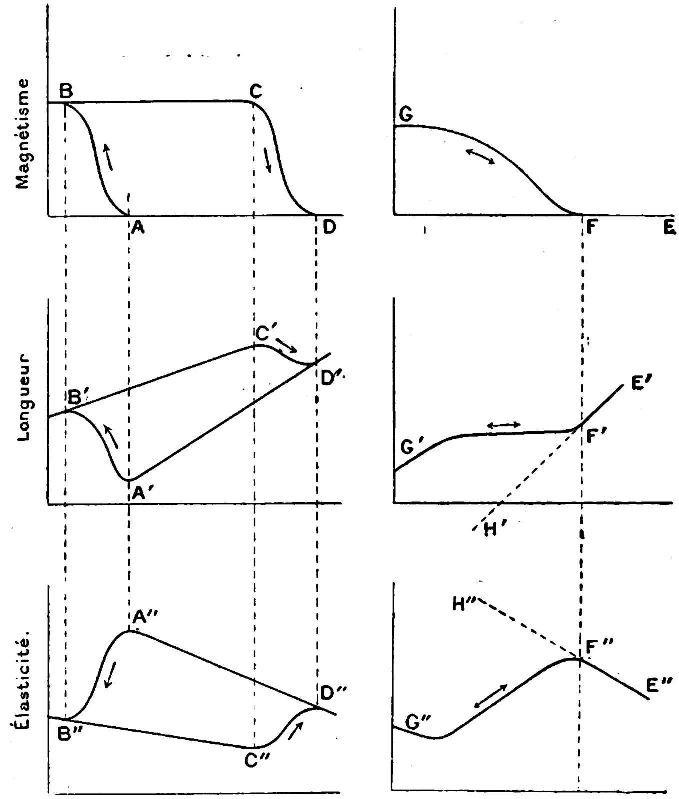


Fig. 3.

donne l'alliage que lorsqu'on a dépassé, au réchauffement, la courbe supérieure.

Le détail des phénomènes ne pourra être bien compris qu'en nous aidant d'autres diagrammes [1].

Supposons donc que nous ayons porté sur un troisième

[1] Les phénomènes ne sont représentés que qualitativement dans les diagrammes non cotés; on n'y cherchera donc pas une indication métrologique relative aux grandeurs observées.

axe, perpendiculaire au plan des deux autres, la perméabilité magnétique des alliages, et que nous fassions, dans la surface ainsi obtenue, deux coupes, dont les traces sont marquées par les droites MN, PQ. Prenant maintenant la température comme abscisse, la susceptibilité magnétique comme ordonnée, les diagrammes de la figure 3 représenteront les intersections avec les plans MN, PQ des surfaces d'apparition et de disparition du magnétisme en fonction de la température pour deux alliages déterminés, pris comme types des deux catégories.

Le premier alliage partant d'une température élevée reste non magnétique tant qu'il n'a pas atteint le point A ; puis il devient magnétique suivant la courbe AB, jusqu'à la complète transformation; au réchauffement, le magnétisme reste à peu près constant jusqu'au point C; là il commence à baisser rapidement jusqu'à sa perte totale en D.

La coupe PQ nous révèle un tout autre phénomène: l'alliage se refroidissant jusqu'au point F, on voit apparaître le magnétisme, qui augmente graduellement suivant la courbe FG; mais, lorsque la température s'élève de nouveau, le magnétisme diminue le long de la même courbe, et disparaît au point F.

Les alliages de la première catégorie ont été désignés sous le nom d'*irréversibles*, ceux de la seconde sous la dénomination de *réversibles*. Ces caractéristiques sont communes à toutes les propriétés des aciers au nickel.

880. — **Changements de volume.** — Lorsqu'on refroidit une barre d'un alliage à moins de 25 °/₀ de nickel depuis la température de la forge jusque vers 0°, on la voit se raccourcir suivant la ligne à peu près droite D′A′, dont le coefficient d'inclinaison est d'environ 18.10^{-6}, c'est-à-dire sensiblement celui que donnerait un laiton de moyenne qualité. Puis, continuant à refroidir, on voit la barre s'allonger rapidement en suivant la courbe A′B′, jusqu'à une certaine limite qui est atteinte à une température très basse. Réchauffant alors, on constate que la barre, loin de repasser par B′A′,

se dilate suivant B′C′ ; cette ligne, presque droite, est inclinée de 10 à 11.10^{-6}, valeur voisine de celle que l'on trouverait pour un acier ordinaire.

Ainsi que pour le magnétisme, l'irréversibilité est complète, et se produit, autant que les expériences permettent d'en juger, suivant un cycle dont les phases concordent, comme limites de température, avec celles qui marquent le début et la fin des transformations magnétiques.

Tous les alliages irréversibles participent au même phénomène, dont l'amplitude et les limites de température diffèrent seules, mais dont les caractères généraux se conservent exactement. Pour un alliage à 25 °/₀, l'allongement dû à la transformation complète, compté verticalement entre le point A′ et la droite B′C′, est voisin de *6 millimètres par mètre.*

Dans les alliages réversibles, les phénomènes sont très différents. L'alliage, partant d'une température élevée, se contracte d'abord régulièrement suivant une droite E′F′, dont l'inclinaison est toujours supérieure à celle qui correspond à la dilation du fer ou d'un mélange de fer et de nickel aux températures ordinaires, et diminue à mesure qu'augmente la teneur en nickel. Puis, dans la région des températures où le magnétisme commence à apparaître, le taux de la contraction diminue, et la droite E′F′, au lieu de se prolonger vers H′, se poursuit dans une courbe accentuée, qui marque le commencement d'une période d'abaissement considérable de la variation en fonction de la température. Plus bas, la variation prend une allure plus régulière, pour aboutir à une autre courbe à courbure négative, qui se termine à son tour dans une ligne à très faible courbure de sens normal. Dans cette dernière région, le taux de la variation est celui d'un mélange de fer et de nickel aux températures ordinaires.

Au point de vue des applications, deux eourbes surtout nous intéressent : celles des coeffieients α et β en fonction de la teneur ; nous limiterons cette représentation aux alliages réversibles, les seuls qui présentent, pour le moment, une importance pratique.

La courbe ABN (fig. 4) montre l'allure du coefficient α, ou de la valeur vraie de la dilatabilité aux températures ordi-

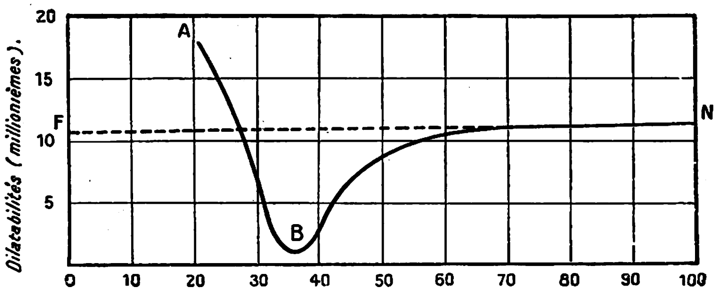


Fig. 4.

naires. La droite FN représente ce que devraient être les dilatations si les alliages en question suivaient la règle des mélanges; elle fait ressortir nettement l'amplitude de l'anomalie. Le premier segment de la courbe correspond à la portion E′F′ de la précédente; puis nous gagnons, en allant vers la droite, les régions suivantes, qui correspondent à la transformation du fer. A 36 %, la courbe passe par un minimum très accentué, pour lequel l'ordonnée est égale à 1.10^{-6}, c'est-à-dire à moins du dixième de la dilatation du fer. Cet alliage,

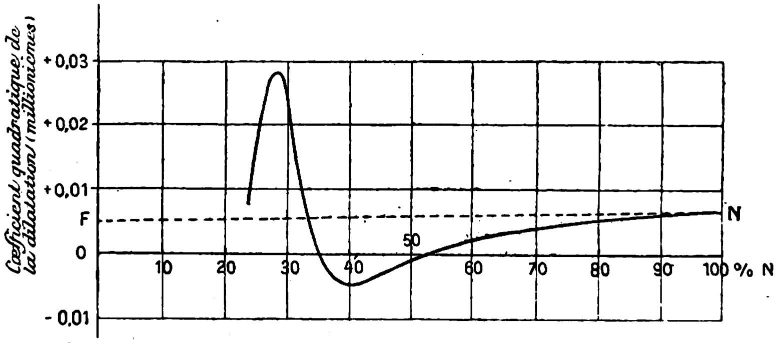


Fig. 5.

que des préparations particulières peuvent amener à ne plus posséder de dilatation mesurable, est connu sous le nom d'*invar*, diminutif d'invariable. Il est susceptible de nombreuses applications.

Le diagramme (fig. 5) n'est pas moins curieux. Tandis que,

pour tous les métaux et alliages étudiés jusqu'ici, le coefficient β est positif et compris entre des limites étroites, nous voyons celui des aciers au nickel monter jusqu'à une valeur positive très forte, à peu près quadruple de celle que possède le fer, puis baisser jusqu'à une valeur négative et remonter ensuite pour se raccorder à celle du nickel.

On retrouve encore, dans ce diagramme, les particularités de la courbe E'G' (fig. 3). Les très fortes valeurs de β correspondent à la région F', les valeurs négatives au passage vers G'; les autres sont intermédiaires.

Interprétant le dernier diagramme, on voit que la dilatabilité d'un acier à 28 ou 30 % de nickel s'élève très vite quand la température monte (β fortement positif); que celle de l'invar proprement dit est à peu près constante (β à peu près nul), et que celle des alliages plus riches en nickel, jusqu'à 50 % environ, diminue lorsque la température s'élève (β négatif). L'existence d'un β négatif a permis une application importante, ainsi que nous le verrons plus loin.

Toutes les propriétés qui viennent d'être décrites, s'expliquent, si l'on admet l'abaissement et l'étalement de la transformation que subit le fer à 890°.

881. — **Propriétés élastiques.** — Le module d'élasticité des aciers au nickel présente, dans sa valeur absolue, des particularités rappelant, avec une forte atténuation, celles des dilatations.

En même temps qu'ils se transforment par le refroidissement, les aciers irréversibles perdent de leur résistance aux déformations, de telle sorte qu'un acier à 24 % de nickel, par exemple, dont le module est de 19,3 tonnes par millimètre carré à l'état non magnétique, ne possède plus qu'un module de 17,4 tonnes lorsqu'il a été amené, par le passage à une température basse, à l'état fortement magnétique.

Pour des alliages réversibles, le module possède une valeur unique à chaque température. L'ensemble des valeurs pour tous ces alliages est représenté en gros par une courbe en anse de panier, sur laquelle se dessinent de faibles anomalies

positives et négatives respectivement dans les régions de 28 % et de 36 %, suivant, avec une forte atténuation, celle de la courbe (fig. 4). Dans la région de l'invar, le module est, aux températures ordinaires, voisin de 15 tonnes par mm², soit d'un bon quart inférieur à ce qu'indiquerait la règle des mélanges.

Les changements du module en fonction de la température sont représentés, dans leur forme générale, pour un acier au nickel irréversible, par les cycles A″ B″ C″ D″ (fig. 3), qui présentent encore une correspondance parfaite avec ceux des changements irréversibles du magnétisme et des dimensions.

Pour les réversibles, nous trouvons une coïncidence semblable dans les courbes E″ F″ G″. Dans la région G″, la courbe s'abaisse vers la droite ; ce segment correspond au phénomène normal, celui de la diminution de rigidité commun à la presque-totalité des métaux et alliages à mesure de l'élévation de la température. Puis la courbe s'infléchit vers le haut, passe par un minimum et remonte fortement, pour présenter une région étendue de pleine anomalie. Lorsqu'on continue à monter, le phénomène change encore de sens : le module passe par un maximum très net, puis il recommence à baisser. L'anomalie est alors achevée ; la direction E″ H″ devrait être normalement suivie au refroidissement ; l'écart par rapport à cette droite constitue l'amplitude de l'anomalie d'élasticité.

Si, maintenant, au lieu de représenter l'ensemble du phénomène pour un seul alliage, nous figurons, pour tous les alliages, les variations du module en fonction de la température, nous obtenons une courbe telle que ABN_r (fig. 6), dans laquelle nous retrouvons, changées de signe, toutes les particularités de la courbe correspondante des dilatations (fig. 4).

Ainsi, soit pour les alliages réversibles, soit pour les irréversibles, dilatation et module suivent des lois analogues qu'eût permis de prévoir la connaissance des changements du fer, combinée avec celle des modifications générales que la dissolution fait subir aux transformations moléculaires.

L'élasticité de torsion suit encore des lois analogues ; cependant, autant qu'on en puisse juger par des expériences faites sur des fils portant une masse oscillante les chargeant assez fortement, la courbe de variation thermique du second

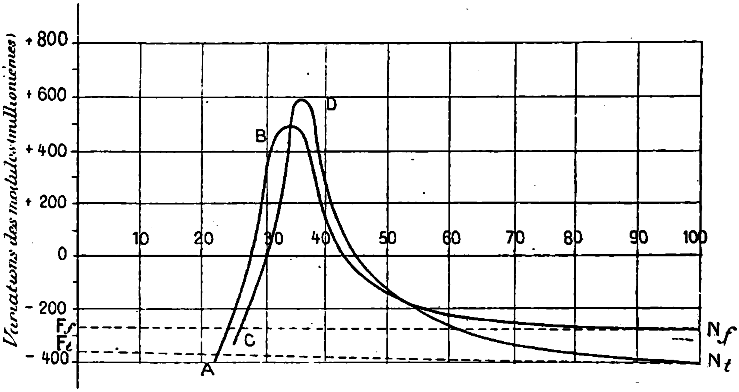


Fig. 6.

module d'élasticité est légèrement décalée par rapport à celle qui se rapporte à la flexion, ainsi qu'on le voit sur la fig. 6, où cette variation est représentée par CDN_t. Le taux des changements est sensiblement plus fort que pour l'élasticité de flexion.

Pour l'élasticité de flexion ou de torsion, les droites F N_f, F_t N_t représentent ce que devrait être le phénomène normal ; l'amplitude de l'anomalie apparaît ainsi très considérable.

Les indications qui précèdent ne doivent être considérées que comme une esquisse des phénomènes ; les variations thermiques des deux modules d'élasticité des aciers au nickel n'ont été, en effet, soumises qu'à des études partielles, destinées à renseigner surtout sur certaines de leurs applications dont nous parlerons plus loin en détail.

Notons surtout, pour le moment, ce fait qu'il existe deux groupes d'alliages pour chacun desquels la variation du module est sensiblement nulle, et qui permettent d'obtenir des ressorts de flexion ou des ressorts de torsion pratiquement insensibles à l'action de la température.

Toutefois, comme le montre la courbe E″ F″ G″ (fig. 3), cette insensibilité à la température n'existe à proprement parler qu'en deux points : le maximum et le minimum de la courbe ; dès qu'on s'en écarte, l'action de la température reparaît, graduellement et d'abord beaucoup moins sensible que pour les autres métaux ou alliages, mais cependant déjà appréciable à une dizaine de degrés du maximum.

Ces faits doivent être parfaitement compris si l'on veut pouvoir juger sainement des applications, au réglage des montres, des aciers au nickel à élasticité dite constante.

Il nous reste un mot à dire sur la limite élastique, fort importante à connaître pour les applications dont les aciers-nickel sont susceptibles en horlogerie.

Cette limite, rapportée en général à l'effort relatif provoquant la première déformation permanente, dépend, dans une large mesure, de l'état physique de l'alliage. Les irréversibles non-magnétiques possèdent une limite peu élevée : ce sont des métaux mous ; à l'état magnétique, au contraire, ils sont très élastiques et susceptibles de fournir de bons ressorts.

Les alliages réversibles sont doués, à l'état naturel, c'est-à-dire forgés ou laminés à chaud, d'une limite peu élevée ; leur caractéristique est assez exactement celle des aciers doux, mais ils durcissent beaucoup par l'écrouissage, et peuvent, après un laminage très poussé, fournir des ressorts passables, quoique bien inférieurs à ceux en acier trempé. Des additions métallurgiques telles que le chrome élèvent la limite élastique, et rendent les alliages plus aptes à prendre l'écrouissage ; toutefois, les ressorts faits avec ces métaux restent toujours inférieurs à ceux d'acier trempé.

882. — **Changements passagers ou permanents.** — Pour simplifier l'exposé général des propriétés des aciers au nickel, nous avons admis que les transformations dont ils dépendent sont entièrement et immédiatement réversibles, c'est-à-dire que, lors d'un changement quelconque de la température, ces propriétés prennent immédiatement la valeur correspon-

dante, et la conservent aussi longtemps que règne cette même température.

Mais il n'en est pas rigoureusement ainsi; la plupart des changements des aciers au nickel se produisent avec un certain retard, en ce sens que, lors d'une variation de la température, la plus grande partie du changement est instantanée, tandis qu'un petit résidu ne s'établit que lentement.

De semblables retards ne sont pas particuliers aux aciers

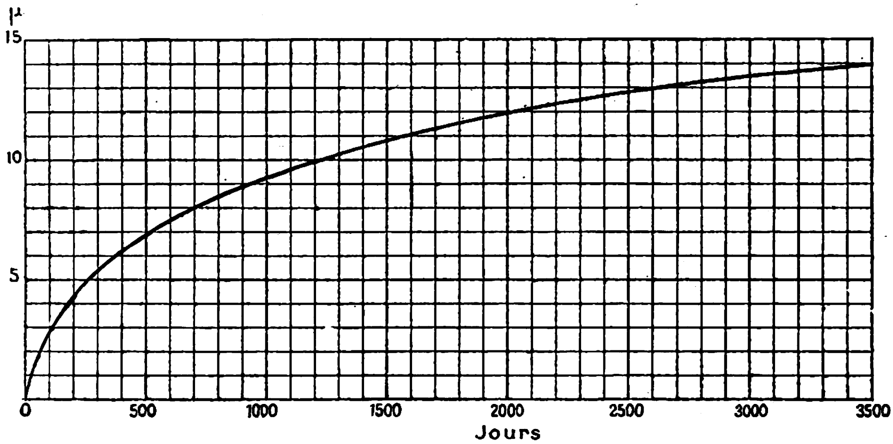


Fig. 7.

au nickel. On les connaît depuis longtemps dans le verre, où on les désigne sous le nom d'hystérèse thermique, et bon nombre de métaux y participent également. Dans les aciers au nickel, toutefois, ils sont plus intenses que dans la plupart des métaux ou alliages usuels; mais, surtout, ils sont mieux étudiés, et on a beaucoup insisté sur eux en raison des nombreuses applications de ces aciers aux arts de précision.

Les changements en question sont de deux espèces; les premiers, de nature permanente, se manifestent par le fait qu'une barre d'acier-nickel, maintenue constamment à la température du laboratoire, s'allonge dans le cours des années, et tend vers une limite qui semble définie. La limite dépend de la température; la marche est d'autant plus rapide que cette dernière est plus élevée.

Les autres variations, de nature temporaire, consistent

dans les retards caractérisés plus haut. Le changement permanent étant éliminé par une longue stagnation d'une barre à une température constante, si on élève rapidement la température, la barre, après s'être dilatée conformément aux valeurs portées sur la courbe (fig. 4), se contracte légèrement, pour se fixer, après des minutes, des heures ou des journées, suivant la température de l'expérience, à une longueur qu'elle ne modifie plus. Le phénomène inverse se produit à température descendante.

Pour l'invar proprement dit, les courbes fig. 7 et 8 nous renseigneront très complètement. La première relie les observations faites pendant onze ans sur une barre d'invar chauffée d'abord à 150°, puis refroidie lentement jusqu'à 40° et abandonnée ensuite à la température ambiante. On voit qu'elle s'est allongée, dans le cours du temps, de $^{14}/_{1\,000\,000}$ de sa valeur primitive, dont la moitié s'est produite dans les premiers 500 jours, tandis qu'à une époque plus récente, il a fallu plus de deux années pour que l'on pût constater un changement d'un millionième.

La seconde courbe montre, entre 0° et 100°, les différences que l'on observe dans une tige d'invar, suivant qu'on la mesure au premier instant où la température s'est établie, ou après un temps théoriquement infiniment étendu. Cette courbe est condensée dans la formule

$$\Delta l = -0{,}00325.10^{-6}\, l\,\theta^2,$$

où θ représente la température en degrés centigrades à partir du zéro vulgaire. On voit par exemple que, si l'on passe lentement ou brusquement de 0° à 10°, l'écart des deux valeurs trouvées pour la règle ne sera que de $0^\mu{,}3$ par mètre, quantité négligeable pour la presque-totalité des applications. Mais, en raison du carré de la température intervenant dans la formule, les variations deviennent plus rapides à mesure que la température s'élève.

Ces dernières semblent indépendantes du traitement subi par l'invar. Mais les changements permanents sont influencés dans une large mesure par ces derniers. Il a été spécifié que

la courbe (fig. 7) se rapporte à une règle refroidie lentement à partir de 150°. Pour une règle n'ayant subi aucun traitement particulier à partir du forgeage, les changements sont beaucoup plus rapides, et atteignent, après quelques années, une valeur à peu près triple de celle qui a été observée sur

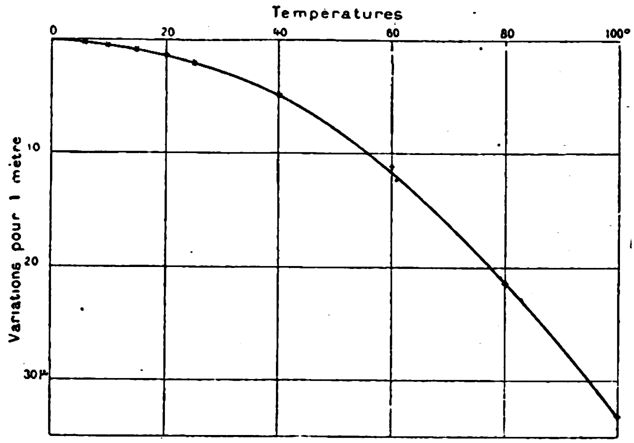


Fig. 8.

une règle soumise à un refroidissement lent. C'est pour amener ces changements à une valeur aussi faible que possible, que les pièces d'invar destinées à des travaux de précision sont soumises à une opération nommée *étuvage*, et qui consiste à les chauffer pendant quelques jours à 100°, puis à les amener à la température ordinaire par un refroidissement graduel d'une durée de trois ou quatre mois.

L'intensité et la rapidité des phénomènes qui viennent d'être décrits dépend, d'ailleurs, de la composition de l'alliage. Relativement notables dans l'invar proprement dit, ils diminuent lorsqu'on augmente la teneur en nickel, et deviennent à peu près insensibles pour les alliages à 42 % de nickel. Ils reparaissent en partie, de sens inverse, mais avec une très faible intensité, dans des alliages de plus forte teneur, et s'annulent pratiquement vers 60 % de nickel.

Disons, pour n'y plus revenir, que les alliages à 42 ou 44 %, dont la dilatation est encore inférieure à celle du platine, sont précieux par leur stabilité; en dehors de l'emploi

qui en est fait pour les balanciers compensateurs, sur lequel nous nous étendrons dans la suite, ils sont utilisés, pour ces raisons, dans la construction d'étalons de précision. Les alliages d'une teneur comprise entre 53 et 58 °/₀ de nickel sont employés pour la confection des étalons industriels destinés à la mesure des pièces d'acier ; ils sont, en effet, doués de dilatabilités très voisines de celles des alliages ferriques industriels, fers ou aciers ordinaires ; ils sont très peu oxydables et d'une stabilité presque parfaite.

883.— **Propriétés diverses.**—Les aciers au nickel sont d'autant moins oxydables qu'ils sont plus riches en nickel. L'invar est déjà assez résistant pour pouvoir être soumis pendant longtemps à l'action de l'air humide sans autre attaque qu'un peu de ternissage, qu'un nettoyage à la peau fait disparaître. Il est, en revanche, assez sensible aux acides, et doit être soustrait, tout comme l'acier, à l'action des vapeurs chlorhydriques.

Les aciers réversibles sont malléables ; ils supportent le martelage à froid, le laminage, le tréfilage. La trempe les adoucit et prépare ces opérations, qui, en revanche, les durcissent assez rapidement, et ne doivent pas dépasser une certaine limite sous peine de rupture.

A l'état doux, les aciers au nickel supportent des allongements considérables avant de se rompre; les extensions relatives de 30 °/₀ ne sont pas rares. Il en résulte que ces alliages résistent particulièrement bien au choc, ce qui les rend précieux pour certains usages ; mais, d'autre part, et pour les mêmes raisons, ils sont difficiles à user, et polissent les outils, limes ou fraises. Le travail au tour doit être fait avec des outils très durs et très robustes; le mouvement doit être lent, mais les copeaux peuvent être forts.

L'invar et les alliages de la même série sont généralement exempts de piqûres, même microscopiques ; ils prennent un poli admirable et qui se conserve longtemps; ils supportent de très beaux tracés, condition essentielle pour la construction d'étalons de précision tels qu'on commence à les employer dans les machines à mesurer destinées aux horlogers.

DEUXIÈME PARTIE

Applications.

Les applications des aciers au nickel à la correction des instruments destinés à la mesure du temps sont de quatre ordres distincts : les premières et les plus évidentes ont trait à la construction du pendule des horloges ; d'autres se rapportent au balancier des chronomètres ; les deux dernières enfin, utilisant les propriétés élastiques de ces singuliers alliages, ont conduit à l'adoption de spiraux ou de suspensions rotatives supprimant toute nécessité d'une compensation particulière. Ces applications diverses seront traitées dans la suite de ce chapitre.

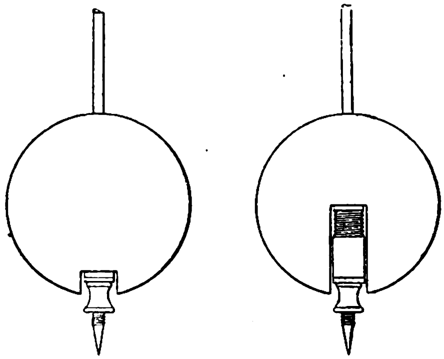
Le pendule à tige d'invar.

884. — **Description sommaire du pendule à tige d'invar.** — La dilatation de l'invar est à celle des métaux usuels dans un rapport du même ordre que celui de la dilatation de l'acier à celle du mercure. On pourra donc transporter, sur le pendule à tige d'invar, le mode de compensation de Graham, en remplaçant le mercure par une lentille convenablement supportée sur un écrou.

Les avantages de cette construction du pendule seront multiples. Indépendamment de l'abaissement sensible du prix, dû à l'abandon du mercure, et des complications qu'entraîne son emploi, on aura réalisé un pendule constitué entièrement par des pièces solides, permettant le transport soit du pendule isolé, soit de l'horloge toute montée, sans aucune crainte

d'accident ; en second lieu, l'absence, dans le pendule, de pièces oscillant d'une façon indépendante, réduira les amortissements possibles et, par conséquent, la force motrice nécessaire à l'entretien de l'amplitude d'oscillation ; enfin, les différences de température du haut en bas de la cage de l'horloge seront dix fois moins ressenties dans le pendule à tige d'invar que dans le pendule de Graham.

Quant au mode d'exécution du pendule à tige d'invar, il peut varier suivant les commodités recherchées pour sa construction, ou pour le réglage *a posteriori* de sa compensation, ou encore suivant l'objet auquel il doit être adapté. C'est ainsi que, dans le premier modèle qui en a été exécuté, et que j'ai présenté au Comité international des Poids et Mesures en avril 1897, la compensation était obtenue (fig. 9 *a*) simplement par la dilatation ascendante de la lentille reposant, par sa partie inférieure, sur son écrou vissé par la tige ; tandis qu'un peu plus tard, le professeur Marc Thury proposa d'échancrer la lentille jusqu'à son centre et de la faire reposer sur un double cylindre fileté (fig. 9 *b*) engagé à frottement doux sur la tige, et que l'écrou supportait à son tour ; enfin M. Riefler a remplacé l'écrou fileté par l'ensemble de deux cylindres de métaux différents, dont les longueurs individuelles peuvent être calculées de telle sorte que, pour une même longueur totale, la dilatation cherchée soit obtenue.



a Fig. 9. *b*

Plus tard, M. Riefler a adopté, pour les pendules de la plus haute précision, le système de compensation par couches verticales, qu'il avait appliqué déjà à la compensation à mercure. Mais nous ne nous occuperons pas, dans la suite, de cette construction spéciale, admettant qu'une très bonne horloge

doit être placée dans des conditions d'uniformité de la température où une semblable correction est superflue.

Pour le calcul général de la compensation, les trois systèmes qui viennent d'être décrits sont compris dans les mêmes formules, dans lesquelles on introduira la dilatation de la lentille, celle du double cylindre de Thury, ou enfin la dilatation globale des deux cylindres ou cales de Riefler. On n'aura à distinguer entre les dilatations de la lentille et des cales que pour une très petite correction, relative aux variations qu'éprouve le moment d'inertie de la lentille par la dilatation de cette dernière.

La suspension, dont le mécanisme est indépendant de celui de la compensation, devra faire l'objet d'un calcul spécial. Enfin, la compensation devra être constituée de façon sensiblement différente, suivant que le pendule devra osciller à l'air libre ou être enfermé dans une enceinte assurant une densité constante du milieu ambiant ; à mesure que l'air s'échauffe, il allège en effet le pendule de moins en moins, et il en résulte une compensation automatique, dont les effets sont relativement importants.

Au sujet de la compensation qu'il est possible de réaliser, le pendule à tige d'invar présente, sur le pendule de Graham, un avantage supplémentaire sur lequel il convient d'insister. Nons avons vu (page 363) que le fer doux possède une formule de dilatation dont le terme quadratique est important ; au contraire, la dilatation du mercure, aux températures ordinaires, s'éloigne peu d'une forme linéaire. Il en résulte, pour la compensation du pendule de Graham, une *erreur secondaire* consistant en ce qu'un pendule ayant une même marche à deux températures déterminées avance aux températures intermédiaires et retarde aux températures extérieures.

Le coefficient du terme quadratique de l'invar est très petit, comme le montre la courbe (fig. 5) ; on trouve, d'ailleurs, dans les aciers au nickel, toutes les combinaisons possibles du rapport des deux coefficients, entre des limites étendues, et, choisissant un métal convenable pour la pièce compensa-

trice, on pourra toujours annuler l'erreur secondaire. On l'a peu cherché jusqu'ici, parce que, par le fait même des propriétés de l'invar, l'erreur secondaire s'est toujours montrée négligeable.

885. — *Marche du calcul de la compensation* [1]. — Nous considérerons d'abord le pendule isolé, et nous ne tiendrons pas compte des variations de densité de l'air. Le pendule sera supposé dans le vide ou dans une atmosphère de densité et de viscosité constantes. La correction de la poussée sera calculée ultérieurement.

En second lieu, nous ferons abstraction des dimensions de la lentille, pour ne nous occuper que du mouvement de son centre de gravité. Ces dimensions n'interviennent, en première approximation, que dans le calcul de la longueur totale entre la suspension et l'écrou, et elles se traduisent par une diminution de cette longueur de l'ordre du millimètre.

Il en résulte aussi que la forme de la lentille est sans importance pour le calcul élémentaire de la compensation. Qu'elle soit symétrique ou non, qu'elle repose sur l'écrou par son point le plus bas ou qu'elle soit entaillée pour loger l'écrou, le calcul pourra être conduit de la même façon, à la seule condition que la lentille soit suffisamment ramassée sur elle-même, c'est-à-dire que le carré du rapport entre ses dimensions à la longueur totale du pendule ne dépasse pas quelques centièmes.

Le calcul pourrait, dans ces hypothèses, être fait en une fois pour tous les termes compensateurs ; mais les formules seraient d'une extrême complication ; il est préférable de procéder par trois étapes successives, qui sont les suivantes :

1° Détermination approximative de la longueur de la pièce compensatrice en négligeant la masse de la tige vis-à-vis de celle de la lentille. Ce calcul doit évidemment donner une valeur trop faible, mais d'autant plus rapprochée que la lentille est plus lourde par rapport à la tige.

2° Détermination de la longueur du pendule entre la suspension et le centre de gravité de la lentille. Il faut déjà tenir

[1] Voir : Ch.-Éd. Guillaume, *Le Pendule en acier au nickel.* (Publications du *Journal suisse d'Horlogerie.*)

compte des masses relatives de la tige et de la lentille, et adopter une valeur correcte pour les moments d'inertie, sauf en ce qui concerne les dimensions de la lentille.

3° En possession d'une valeur approchée de la longueur du pendule et de la longueur de la pièce compensatrice, on calcule le quotient du moment d'inertie I et du moment statique S du pendule complet ; on détermine ensuite la variation de ces deux quantités, en négligeant les termes au carré, et on remplace la condition $\frac{I}{S} =$ *constante* par la condition équivalente

$$\frac{\Delta I}{\Delta S} = \frac{I}{S},$$

qui donne, étant résolue, la correction à appliquer à la première valeur trouvée pour la pièce compensatrice.

886.— *Longueur de la tige et de la pièce compensatrice.*— Voici, traduites algébriquement, les diverses étapes du calcul :

L étant la longueur du pendule entre la suspension et le centre de gravité de la lentille, l la longueur additionnelle jusqu'à l'écrou, $\frac{M}{m} = A$ le quotient des masses de la lentille et de la tige, λ_1 la longueur approchée de la pièce compensatrice, α_1 et α_2 les coefficients de dilatation de la tige et de la pièce compensatrice, on a d'abord évidemment

$$\lambda_1 = \frac{L\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}. \qquad (1)$$

On admettra $L = 100^{cm}$ pour ce premier calcul, fait pour un pendule à secondes. La valeur de λ_1 servira à fixer l suivant les convenances du constructeur.

On peut maintenant déterminer L plus exactement par la relation

$$981\ [(L + l) + 2AL] = \frac{2\pi^2}{3}\ [(L + l)^2 + 3\ AL^2], \qquad (2)$$

qui est le développement de la formule

$$T = \pi \sqrt{\frac{I}{S}},$$

appliquée au pendule battant la seconde, et dans laquelle

$$I = \frac{1}{3} m (L + l)^2 + ML^2$$

$$S = g [\frac{1}{2} m (L + l) + ML],$$

les termes qui contiennent m et M se rapportant respectivement à la tige et à la lentille.

La résolution de l'équation (2) nécessite l'extraction d'une racine carrée. Lorsqu'elle doit être faite un grand nombre de fois, il est beaucoup plus simple de remplacer L par $100 + \delta$, et de considérer δ comme l'inconnue. On calculera alors l'excès, positif ou négatif, de L sur 100^{cm}, par la relation

$$\delta = \frac{98,8 - 3,6A - 1,02l - 0,02l^2}{1,0 + 6,07A + 0,04l}, \tag{3}$$

qui se déduit immédiatement de (2) après la substitution.

Faisant d'abord varier A en conservant l constant, on réduit la résolution de l'équation à deux additions et une division.

Pour le calcul de λ, longueur exacte de la pièce compensatrice, on posera la condition suivante, qui devra être satisfaite à toute température :

$$981 \frac{I}{S} = \frac{\frac{1}{3}(L + l)^2 + A L^2}{\frac{1}{2}(L + l) + A L} = \text{constante} = C. \tag{4}$$

Comme la valeur de la constante C ne devra servir à calculer qu'une petite correction, on pourra la limiter à un petit nombre de chiffres. La variation de cette grandeur sera :

$$981 \frac{\Delta I}{\Delta S} = \frac{4}{3} \frac{(L + l)^2 \alpha_1 + 3AL(L\alpha_1 + \lambda\alpha_1 - \lambda\alpha_2)}{(L + l)\alpha_1 + 2A(L\alpha_1 + \lambda\alpha_1 - \lambda\alpha_2)}. \tag{5}$$

Egalant ce quotient à la valeur de C précédemment trouvée, on en tirera la valeur de λ.

Mais nous en connaissons déjà une valeur, λ_1, approchée par défaut ; nous pouvons donc poser .

$$\lambda = \lambda_1 + \varepsilon, \tag{6}$$

ε étant une petite quantité.

Introduisant cette expression dans l'équation (5) et réduisant au moyen de la relation :

$$\lambda = \frac{La_1}{a_2 - a} \quad \text{ou} \quad La_1 + \lambda_1 a_1 - \lambda_1 a_2 = 0,$$

puis posant $\frac{a_2}{a_1} = \beta$, on trouve :

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{(L + l)^2 + 3AL\,(1 - \beta)\varepsilon}{(L + l) \;+ 2A\,(1 \;- \beta)\varepsilon} = C, \tag{7}$$

d'où l'on tire, en résolvant par rapport à ε :

$$\varepsilon = \frac{(L + l)\,[4\,(L + l) - 3C]}{6A\,(2L - C)\,(\beta - 1)}. \tag{8}$$

La longueur L du pendule étant toujours assez voisine de la quantité C, et β étant nécessairement beaucoup plus grand que l'unité, tous les facteurs composant cette expression sont très éloignés de zéro; comme ε est une petite correction, il suffira d'introduire dans la formule des valeurs approchées des éléments, ce qui abrègera considérablement le calcul. Ainsi, pour le pendule battant la seconde, on pourra toujours poser $2L - C = 100$, sans fausser ε de plus de 2 ou 3 centimètres de millimètre. ε est d'autant plus petit que A et β sont plus grands, ce qu'on aurait pu prévoir, puisque, si la masse de la tige était nulle, ou si sa dilatation était nulle, ε serait forcément égal à zéro. Sa valeur est comprise, dans la majorité des cas que l'on rencontrera en pratique, entre

$$\frac{20}{A(\beta - 1)} \text{ et } \frac{30}{A(\beta - 1)}.$$

Supposons une tige mince d'un métal se dilatant 21 fois moins que celui de la pièce compensatrice, et posons par exemple $A = 20$; on aura $\varepsilon = 0^{cm},05$.

Considérons, au contraire, une tige très forte, donnant $A = 10$ et se dilatant seulement 7 fois moins que la pièce compensatrice, cas extrêmement défavorable; on aura

$$\varepsilon = 0^{cm},6.$$

Il faudrait atteindre des conditions qui se trouveront très rarement réalisées en pratique, c'est-à-dire prendre un invar de la plus mauvaise qualité en très forte tige et le compenser avec une lentille de fonte, pour que ε dépassât sensiblement 1^{cm} pour le pendule à seconde.

887. — *Rôle de la suspension.* — On peut, comme nous l'avons vu, faire avec l'invar des ressorts passables et bien suffisants pour supporter les très faibles déformations imposées aux suspensions des pendules. Ces ressorts peuvent être pincés dans des lames d'invar, et il n'y a aucune difficulté sérieuse à tailler, dans la tige elle-même, les crochets destinés à être suspendus à la goupille. Si toute la suspension est ainsi homogène, le calcul qui précède s'applique à la longueur entière comprise entre l'extrémité supérieure des ressorts et la tablette de l'écrou. Mais si, en vue de faciliter le travail, on préfère employer, pour les pièces de la suspension, des métaux ou alliages usuels, il est nécessaire de tenir compte de leur dilatation dans le calcul de la compensation.

En général, dans une suspension, les ressorts seuls sont en acier; les pinces sont en laiton, et la tige du pendule est munie d'une armature de même alliage, dans laquelle ont été taillés les crochets. De semblables dispositifs laissent quelque incertitude sur le calcul et sur le fonctionnement des pièces de dilatations différentes, plus ou moins solidarisées. Les ressorts ou la tige peuvent se dilater par petits sauts dans les pièces de laiton, et provoquer de brusques écarts de l'horloge. On devra donc les éviter dans les régulateurs de qualité supérieure ; en revanche, on voudra peut-être, pour des raisons d'économie, conserver des suspensions en laiton dans les pendules de second ordre. Dans ce cas, il y aura lieu d'introduire une compensation additionnelle, dont il est facile de calculer la valeur.

Soit s la longueur de la pièce servant à la suspension, depuis l'insertion supérieure du ressort jusqu'à la goupille assurant la position de la tige, α_3 sa dilatation moyenne. Posons $\alpha_3 - \alpha_1 = \gamma$, ce coefficient représentant l'excès de la dilatation moyenne sur celle de la tige.

La portion de la dilatation dont il n'a pas été tenu compte dans le calcul précédent est γs, et la première approximation nous indique que nous devrons donner à la lentille un mouvement ascensionnel supplémentaire, à l'aide de la pièce

compensatrice, qui devra, dans ce but, être augmentée de

$$\lambda = \frac{\gamma s}{\alpha_2}.$$

Dans le calcul de cette longueur, on a supposé nulle la masse de la tige. Si l'on veut en tenir compte, il faut introduire dans l'expression

$$\frac{AL^2 + \frac{1}{3}(L + l)^2}{AL + \frac{1}{2}(L + l)} = C$$

la dilatation de chacun des éléments du pendule.

La condition de la constance de la durée d'oscillation sera [1] :

$$\frac{A(L + \gamma s - \alpha_2\lambda_2)^2 + \frac{1}{3}(L + l + \gamma s)^2}{A(L + \gamma s - \alpha_2\lambda_2) + \frac{1}{2}(L + l + \gamma s)} = \frac{AL^2 + \frac{1}{3}(L + l)}{AL + \frac{1}{2}(L + l)}.$$

Nous pouvons résoudre par rapport à λ_2, en négligeant les termes qui n'apportent au résultat final que des modifications très inférieures au dixième de millimètre. On trouve ainsi

$$\lambda_2 = \frac{\gamma s}{\alpha_2}\left[1 + \frac{1}{6A}\left(1 + \frac{5l}{L}\right)\right],$$

quantité qui devra être ajoutée à λ.

Le terme $\frac{1}{6A}\left(1 + \frac{5l}{L}\right)$ a, en pratique, une valeur comprise entre 0,01 et 0,03.

888. — *Variation du moment d'inertie de la lentille.* — Dans les cas ordinaires, la variation du moment d'inertie de la lentille par l'effet de sa dilatation peut être négligée en première approximation, ainsi qu'il a été dit plus haut (page 381). Mais, dans le cas d'une lentille de grandes dimensions, l'approximation peut n'être plus suffisante. Cette augmentation du moment d'inertie de la lentille, due à sa dilatation propre, est indépendante de l'action de la pièce compensatrice. Il faut, par conséquent, distinguer, ce que nous n'avons pas fait jusqu'ici, entre la dilatation de cette dernière et celle de la pièce produisant son mouvement de bas en haut.

Pour ne pas modifier la notation adoptée, je désignerai

[1] Cette condition devant être satisfaite à toute température, il est évidemment inutile, pour le problème actuel, d'écrire θ dans la formule.

par α_2 le coefficient de dilatation de la pièce compensatrice et par α_4 celui de la lentille.

Soient ρ le rayon de giration de la lentille, x la quantité dont nous devrons augmenter la pièce compensatrice pour tenir compte de la variation dont nous avons à nous occuper.

Le moment d'inertie de la lentille qui, à la température de départ, est égal à $M\rho^2$, prend, après une variation égale à θ, la valeur

$$M\rho^2(1 + \alpha_4\theta^2),$$

dont la variation est sensiblement égale à $2M\rho^2\alpha_4\theta$.

D'autre part, le moment d'inertie de l'ensemble éprouve, par une ascension correspondante de la lentille, due à la dilatation de la partie additionnelle x de la pièce compensatrice, une variation exprimée par $-2MLx\alpha_2\theta$. Enfin le moment statique varie à son tour de $-Mx\alpha_2\theta$.

Si donc nous désignons, comme précédemment, par I et S le moment d'inertie et le moment statique du pendule complet, quantités dont la compensation déjà faite (page 382) a rendu le quotient constant, à la petite correction actuelle près, nous aurons, pour la durée d'oscillation du pendule, l'expression modifiée :

$$T = \pi\sqrt{\frac{I + 2M\rho^2\alpha_4\theta - 2MLx\alpha_2\theta}{S - Mx\alpha_2\theta}},$$

que nous pouvons écrire

$$T = \pi\sqrt{\frac{I}{S}}\sqrt{\frac{1 + \frac{2}{I}M\theta(\rho^2\alpha_4 - Lx\alpha_2)}{1 - \frac{1}{S}Mx\alpha_2\theta}},$$

et, en remarquant que les termes additionnels sont très petits comparés à l'unité, nous pourrons faire passer au numérateur le terme additionnel du dénominateur en changeant son signe. La condition d'invariabilité s'écrira alors:

$$\frac{2M\theta}{I}(\rho^2\alpha_4 - Lx\alpha^2) + \frac{Mx\alpha_2\theta}{S} = 0,$$

d'où l'on tire

$$x = 2\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\frac{\rho^2}{2L - \frac{I}{S}}.$$

Cette relation peut être employée directement au calcul de x ; mais, si l'on remarque que $\frac{I}{S}$ est toujours très voisin de L, dont il diffère en général d'une quantité ne dépassant pas sensiblement 1 %, on arrivera à la formule simplifiée

$$x = 2 \frac{\alpha_4}{\alpha_2} \frac{\rho^2}{L},$$

qui, dans le cas où la pièce compensatrice est prise aux dépens de la lentille, se réduit à

$$x = 2 \frac{\rho^2}{L}.$$

889.— *Variations de la poussée de l'air.*—Dans le calcul des effets de la température sur la poussée de l'air, on négligera, comme dans ce qui précède, tous les termes dont la valeur est d'un ordre inférieur à celui de la précision avec laquelle sont connus les éléments du problème. Cette simplification est d'autant plus permise que, pour un pendule oscillant à l'air libre, les variations de la pression atmosphérique produisent, comme on sait, des variations irrégulières des marches, indépendantes du problème de la compensation.

Pour ne pas surcharger inutilement les formules des termes correctifs précédemment calculés, considérons comme ramassée en son centre de gravité la masse M du pendule de longueur L, supposée invariable. Soit V le volume de la lentille, δ' sa densité à une température de repère, α' son coefficient de dilatation cubique, δ'' et α'' les deux valeurs correspondantes pour l'air ambiant et pour une pression atmosphérique déterminée.

La poussée exercée par l'air à une température de θ degrés supérieure à la température de repère est :

$$p = \frac{Vg''\delta(1 + \alpha'\theta)}{1 + \alpha''\theta} \qquad (9)$$

ou sensiblement

$$p = \frac{Vg\delta''}{1 + (\alpha'' - \alpha')\theta} = \frac{Vg\delta''}{1 + \alpha\theta}, \qquad (9')$$

en posant $\alpha'' - \alpha' = \alpha$, quantité qui diffère de α'' au plus de $\frac{1}{60}$ de sa valeur.

Soit y la portion de la pièce compensatrice, de dilatabilité α, dont la dilatation corrigera les effets du changement de poussée de l'air.

L'expression des actions que nous considérons devra être introduite dans l'équation

$$\frac{I + \Delta S}{S + \Delta I} = \frac{I}{S}, \tag{10}$$

I et S étant indépendants de la température, ΔI et ΔS variant au contraire en même temps qu'elle. Cette équation nous donnera la valeur de y.

Nous aurons successivement

$$S = M g L = V \delta' g L$$

dans le vide, et

$$S = V g L (\delta' - \delta'')$$

dans l'air et à la température de repère.

A la température considérée, cette expression devient :

$$S\theta = VgL \left[\delta' - \frac{\delta''}{1 + \alpha\theta}\right] = MgL \left[1 - \frac{\delta''}{\delta(1 + \alpha)\theta}\right].$$

Ajoutons une action correctrice au moyen de la pièce de longueur y ; S sera augmenté de $+ Mgy (1 + \alpha_2 \theta)$.

D'autre part

$$I = M (L + y)^2$$

à la température de repère et

$$I + \Delta I = M[L + y (1 + \alpha_2 \theta)]^2$$
$$= M[(L + y)_2 + 2y (L + y) \alpha_2 \theta]$$

à la température considérée, le carré de $\alpha_2 \theta$ étant négligé. Introduisant ces qualités dans l'équation (10) et réduisant, on trouve :

$$\frac{(L + y)^2 + 2y (L + y)\alpha_2 \theta}{gL\left[1 - \frac{\delta''}{\delta'(+ a\theta)}\right] + gy (1 + \alpha_2 \theta)} = \frac{(L + y)^2}{g(L + y)}, \tag{11}$$

expression qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{L + y + 2y\alpha_2\theta}{L + y - L\frac{\delta''}{\delta'} + \left(y\alpha_2 + L\frac{\delta''}{\delta'}\alpha\right)\theta} = 1, \tag{11'}$$

en remplaçant provisoirement $\frac{1}{1 + a\theta}$ par $(1 - a\theta)$. Nous reviendrons sur cette transformation.

Remarquons que $\frac{\delta''}{\delta'}$ est en général de l'ordre de $\frac{1}{6000}$, et peut être négligé vis-à-vis de l'unité dans les termes constants. Chassant le dénominateur et réduisant, on trouve

$$2y\,\alpha_2\,\theta = \left(y\alpha_2 + \mathrm{L}\,\frac{\delta''}{\delta'}\,\alpha\right)\theta,$$

$$y = \mathrm{L}\,\frac{\delta''\alpha}{\delta'\alpha_2}. \qquad (12)$$

Pour arriver à cette expression, nous avons été obligés de faire passer au numérateur le terme $\alpha\theta$, primitivement au dénominateur du rapport $\frac{\delta'}{\delta''}$, afin de pouvoir séparer les termes en θ des termes indépendants de la température. Une telle transformation comporte rigoureusement un développement en série, dont on néglige les termes supérieurs si les premiers termes sont déjà très petits. Or, dans le cas actuel, le produit $\alpha\theta$ atteindra $1/_{20}$ environ si les températures considérées s'écartent de 15 degrés de la température de repère. Le troisième terme du développement sera donc égal à $1/_{400}$ environ, et ne sera pas tout-à-fait négligeable ; l'existence de ce terme faussera très légèrement la compensation aux températures très distantes de celle pour laquelle elle a été réalisée ; on ne pourrait, d'ailleurs, calculer une compensation complète qu'en considérant les termes quadratiques des formules de dilatation, que nous avons systématiquement écartés.

Pour nous rendre compte de l'ordre de grandeur de y, supposons que la pièce compensatrice soit en laiton, pour lequel $\alpha_2 = 0{,}000\,018$; α étant égal à 0,0037, le rapport des dilatations est de $1/_{200}$ et $y = \frac{\mathrm{L}}{30}$. La pièce compensatrice aurait donc une longueur de 33^{mm} environ pour un pendule battant la seconde.

Dès le début du calcul, nous avons attribué le signe positif aux termes additionnels de I et de S. Ce signe étant celui de y dans la formule finale, nous devons en conclure que la compensation relative à la poussée de l'air, au lieu de tendre à

remonter la lentille, comme les termes principaux déjà calculés, doit au contraire la laisser descendre d'autant plus que la température est plus élevée.

On en comprend aisément la raison : l'élévation de la température augmente le moment statique du pendule. Pour corriger cette action, on peut soit diminuer le moment statique, soit augmenter le moment d'inertie. Or, si l'on agit par une pièce compensatrice déplaçant la lentille, on modifie le moment d'inertie deux fois plus relativement que le moment statique. On en conclut que l'effet cherché sera donné par une augmentation du moment statique équivalente à cet effet et par une augmentation corrélative double du moment d'inertie, c'est-à-dire par un abaissement de la lentille. La longueur de la pièce qui vient d'être calculée devra donc être retranchée des longueurs trouvées pour la compensation de la dilatation de la tige, pour l'effet de la suspension, etc.

Il résulte enfin du calcul précédent qu'il n'y a aucun intérêt à chercher à abaisser jusqu'à ses dernières limites la dilatation de la tige d'invar du pendule; si cette dilatation était nulle, par exemple, ainsi que celle de la suspension, la compensation serait obtenue en échancrant la lentille au-delà de son centre de gravité, ce qui est peu pratique. On obtiendra, au contraire, une échancrure de dimensions convenables en adoptant un invar dont la dilatabilité, tout en restant faible, n'est pas nulle.

On voit qu'il est nécessaire, pour déterminer une compensation, de savoir si une horloge sera enfermée ou si elle subira les effets des variations de densité de l'air. Dans les changements possibles de la température ambiante, la différence de compensation atteindra facilement une demi-seconde par jour.

On remarquera enfin que, le terme correctif étant proportionnel à δ', c'est-à-dire à la densité initiale de l'air, il ne sera pas indifférent de compenser un pendule suivant que l'altitude sera élevée ou faible; mais, en pratique, les différences seront petites, et une horloge compensée, par exemple, pour

la Chaux-de-Fonds, se tiendrait encore dans le vingtième de seconde par jour à Paris pour les températures extrêmes.

Telles sont, en somme, les causes de variation thermique d'un pendule qu'il est possible de prévoir et de corriger à l'aide de dispositifs compensateurs appropriés. Il ne faut pas oublier toutefois que, dans l'état actuel de la question, il serait illusoire de chercher à obtenir une compensation complète par le calcul immédiat du pendule. La plupart des mécanismes introduisent des erreurs de température encore assez mal connues, et l'on devra finalement avoir recours à un ajustage expérimental.

On peut espérer cependant que les nouvelles horloges électriques, qui fonctionnent sans aucun mécanisme, seront assez indépendantes de la température pour que la compensation complète du pendule seul assure une marche égale en toutes circonstances.

Nous allons parler maintenant d'une erreur inévitable, mais heureusement très petite.

890.—**Erreurs dues aux changements progressifs ou passagers de l'invar.**— Les modifications que l'invar subit dans le cours du temps se traduisent évidemment par de petits changements dans la durée d'oscillation d'un pendule dont la tige est constituée avec cet alliage. C'est l'une des raisons des craintes exprimées au début pour cette application de l'invar, et il faut reconnaître que, aussi longtemps qu'on ne connaissait pas la grandeur des variations possibles, une certaine prudence était tout indiquée. Mais, si l'on veut se rendre un compte exact des inconvénients que ces changements peuvent entraîner pour un pendule, il est nécessaire d'avoir présent à l'esprit l'ordre de grandeur de ces changements.

Dans le cours du temps, rien ne reste immuable. La meilleure des horloges varie, pour des causes diverses, parmi lesquelles l'une des plus constantes est la variabilité des ressorts de suspension du pendule. Mais le changement de marche qui en résulte n'a pas été considéré jusqu'ici comme un

très gros défaut, puisqu'une horloge doit toujours être vérifiée par l'observation des étoiles. Tout ce qu'on lui demande, est de varier très lentement et avec une parfaite régularité.

Fixons un chiffre. Si, d'une année à l'autre, la marche d'une horloge n'a pas varié de plus d'un dixième de seconde par jour, il ne pourra en résulter aucune erreur appréciable.

Or, un dixième de seconde par jour est un peu plus du millionième du temps ; mais, en raison de la relation qui existe entre les variations de longueur du pendule et les variations de sa durée d'oscillation, le changement correspondant de la longueur est de 2,4 millionièmes. Pour garantir une constance d'un dixième de seconde par jour, la tige du pendule ne devra donc pas varier de plus de 2,μ4 par mètre, et, si cette variation ne se produit qu'en une année, on pourra l'employer en toute sécurité pour une horloge de premier ordre. Si nous voulions utiliser une tige d'invar dès le jour d'achèvement de son étuvage à 25°, nous constaterions, dans la première année de sa mise en service, une variation d'un tiers environ plus forte. Mais, si nous laissons la tige se reposer seulement pendant trois mois, nous rentrerions, l'année suivante, dans les limites indiquées ci-dessus.

Au bout de dix années de fonctionnement, la variation dans une année sera réduite au dixième environ de celle qui correspond au dixième de seconde sur la marche diurne. C'est donc au centième de seconde près environ que la marche diurne devra se conserver dans la onzième année.

Ainsi qu'il a été dit plus haut, l'invar, après s'être dilaté d'une certaine quantité à mesure que sa température s'élève, recule légèrement et se raccourcit d'une très petite quantité, dont la valeur numérique a été indiquée (page 375).

Supposons que l'on ne tienne pas compte de cette différence, et que l'on calcule la compensation d'un pendule par les résultats des mesures de dilatation à variation rapide de la température ; on commettra, entre 0° et 30°, une erreur très peu supérieure à 0,1 seconde par jour, soit en moyenne 0,003 seconde par jour et par degré ; cette erreur, presque

négligeable, serait en tout cas systématique et régulière suivant la saison, et elle rentrerait dans les variations lentes de l'horloge, que l'on détermine par l'observation.

Mais même ce petit résidu peut être éliminé par l'application, au calcul de la compensation, d'une formule de dilatation corrigée du terme additionnel. On serait alors exposé seulement, dans le cas du pendule, à des défauts de compensation dans des variations brusques de la température ; or, quand bien même ces variations atteindraient 10 degrés, les erreurs resteraient de l'ordre de 0,02 à 0,03 seconde par jour dans les premiers jours, ce qui paraît négligeable, étant donné surtout que des changements rapides peuvent apporter à la marche de la pendule des variations d'un tout autre ordre, dues à la différence de température des diverses pièces du mécanisme, à la variation de densité de l'air ou à un dépôt d'humidité dans le cas d'un brusque réchauffement.

891. — **Choix de l'invar.** — La courbe (fig. 4) montre que l'invar moyen possède une dilatabilité voisine de 1 millionième par degré. Mais, les opérations industrielles ayant toujours une certaine marge de variabilité, on ne pourra pas admettre, *a priori*, que tous les alliages réalisés sous le nom d'invar possèdent une dilatation identique. La purification plus ou moins parfaite des matières premières, les actions thermiques ou mécaniques subies par les lingots, modifient les dilatations et les font varier, en pratique, entre 0 et 2 millioniêmes.

Puisqu'on peut réaliser un alliage de dilatation nulle, l'idée se présente immédiatement à l'esprit de le faire servir à la construction des pendules, de manière à supprimer la compensation et à éviter l'effet d'une mauvaise répartition de la température le long de la tige. Mais les calculs qui viennent d'être faits montrent qu'une telle solution n'est pas désirable, surtout pour les pendules destinée à osciller à l'air libre ; en effet, dans de telles conditions, la lentille devrait être anti-compensatrice, et aurait la forme d'un étrier reposant sur l'écrou. En fait, l'expérience a montré que l'invar donnant

les compensations les plus faciles est celui dont la dilatation est comprise entre 1,0 et 1,5 millionième.

S'il est vrai que, d'un lingot à l'autre, la dilatabilité est variable, en revanche diverses tiges tirées d'un même lingot et traitées de même possèdent des dilatabilités tellement voisines que les meilleures expériences sont incapables de déceler entre elles aucune différence. On pourra donc, pour les pendules de premier ordre, faire déterminer spécialement la dilatation d'une tige de chaque lingot, et appliquer sa valeur au calcul de la compensation d'un pendule-type, qui sera identique pour toutes les tiges de la même coulée. C'est ainsi que procède M. Riefler pour la construction des pendules à tige d'invar, dont il s'est fait une spécialité.

Mais, si l'on ne veut pas pousser aussi loin l'exactitude. et si l'on utilise un invar de qualité moyenne, on pourra admettre que sa dilatation ne sort pas des limites 1 et 2 millionièmes, et régler toutes les compensations sur 1,5 millionième. Les plus grands écarts possibles seront de 1/50 de seconde par jour et par degré, ou de 2 à 3 secondes par semaine pour un écart de 20 degrés. Comme on voit, une semblable compensation, sans être celle des régulateurs astronomiques, pourrait convenir déjà à de très bonnes horloges.

Suivant la précision à atteindre, les horlogers ont adopté l'une ou l'autre des solutions ci-dessus, et les milliers d'horloges en service ont fait tomber les préventions qui accueillent toute solution nouvelle d'un problème séculaire, préventions auxquelles le pendule à tige d'invar n'avait pas échappé.

Le balancier intégral.

892.— **Théorie de l'erreur secondaire.** — Il a été plusieurs fois question, dans ce volume, de l'erreur secondaire de marche des chronomètres[1], consistant dans le fait qu'une pièce réglée à deux températures déterminées avance aux températures

[1] Voir notamment p. 341, 352.

intermédiaires et retarde aux températures extérieures ; et plusieurs actions ont été indiquées comme susceptibles de participer à cet effet global.

Mais, parmi ces actions, il en est une dont la prépondérance est certaine : c'est la forme même de la variation du module d'élasticité de l'acier en fonction de la température, variation qui est affectée d'un terme quadratique important, ou qui, représentée graphiquement, est figurée par une courbe à forte courbure.

Les horlogers sont, depuis longtemps, conscients de ce fait, et c'est, en dehors du non-magnétisme et de la résistance à l'oxydation, la raison qui a fait adopter par beaucoup d'entre eux le spiral dit « palladium », en remplacement du spiral d'acier, dans les chronomètres de marine.

Mais l'alliage en question est plus dense que l'acier ; il est donc plus fortement actionné par la pesanteur, et les spiraux qui en sont faits se désaxent plus facilement dans les positions inclinées. De plus, le spiral d'acier trempé est celui qui garde le mieux les marches pendant une longue durée. Le problème de la compensation complète du spiral d'acier conserve donc tout son intérêt, et c'est ce qui explique l'invention de toutes les compensations auxiliaires imaginées depuis que l'on connaît l'erreur secondaire.

L'emploi des aciers au nickel a permis de résoudre très simplement ce problème.

On a montré plus haut (p. 329), que conformément à la théorie établie par Yvon Villarceau, la variation du rayon de courbure d'une lame bimétallique est exprimée, en fonction de l'écart de température $(\theta - \theta_0)$, par l'équation

$$(1) \qquad \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{\theta - \theta_0}{h},$$

où ρ et ρ_0 représentent les rayons correspondant aux deux températures θ et θ_0, et où h désigne en abrégé l'expression

$$(2) \qquad \frac{2}{3}\,\frac{e}{a_2 - a_1}\left[1 + \frac{(E_1 e_1{}^2 - E_1 e^2{}_2)^2}{4e^2 e_1 e_2 E_1 E_2}\right],$$

e étant l'épaisseur de la lame, e_1, e_2 les épaisseurs respectives des métaux qui la constituent, E_1, E_2 leurs modules d'élasticité, a_1, a_2 leurs dilatabilités.

Désignons par B le deuxième terme de l'expression entre crochets, et écrivons l'équation (1) sous la forme

$$(3) \qquad \frac{\rho - \rho_0}{\rho} = - \frac{3(a_2 - a_1)\ (\theta - \theta_0)}{2\,\dfrac{e}{\rho_0}\,(1 + B)}.$$

Nous pourrons, en considérant de très petites déformations, nous servir des symboles $\Delta\rho$ et $\Delta\theta$ et écrire

$$(4) \qquad \frac{\Delta\rho}{\rho} = - \frac{3(a_2 - a_1)\Delta\theta}{2e'(1 + B)},$$

e' étant ce que nous appellerons l'*épaisseur relative* de la serge.

On voit que la variation relative du rayon de courbure est proportionnelle à a différence de dilatabilité des deux parties de la serge et inversement proportionnelle à son épaisseur relative; c'est donc cette dernière quantité qui, dans des balanciers de dimensions différentes, assure la similitude des déformations, c'est-à-dire l'égalité de l'action compensatrice.

Le maximum de la déformation est réalisé, comme on l'a vu (p. 330), lorsque $B = 0$ ou lorsque

$$(5) \qquad \frac{e_1}{e_2} = \sqrt{\frac{E_2}{E_1}},$$

condition que l'on s'attache à réaliser en pratique, afin d'obtenir toute la compensation désirable, en donnant à la serge une épaisseur lui assurant une suffisante rigidité.

Les quantités e et E' varient avec la température, et, si la condition ci-dessus est réalisée pour une température déterminée, elle ne l'est, en général, à aucune autre. Il est, de plus, facile de voir que B s'éloigne de la valeur nulle suivant une fonction quadratique; on pourrait être tenté de chercher, dans une forme appropriée de cette fonction, la solution de la question de l'erreur secondaire. Mais le calcul numérique montre que les effets ainsi obtenus seraient toujours négligeables.

Nous pouvons donc, en ce qui concerne cette question, admettre que le balancier remplit la condition de Villarceau, et borner la discussion à celle de l'équation

$$(6) \qquad \frac{\Delta\rho}{\rho} = -\frac{3}{2e'}(a_2 - a_1)\,\Delta\theta.$$

Cette discussion, prise dans toute sa généralité, est compliquée par la variabilité de ρ. Mais, heureusement pour la résolution du problème, il n'y a aucune nécessité à le considérer sous son aspect général. Au contraire, on peut partir pour chercher à corriger l'erreur secondaire, des expériences faites sur les balanciers compensateurs ordinaires, dont l'action moyenne est la même que celle du balancier cherché, mais qui possèdent seulement une action de second ordre un peu différente. Nous pouvons donc négliger le changement des termes communs aux deux balanciers, c'est-à-dire considérer comme constantes les quantités ρ et e'.

Les éléments de variation du balancier sont, comme on l'a vu (p. 342), la courbure de la serge et le mouvement de son point d'attache, en raison de la dilatation du bras. Le premier des deux effets est, dans les balanciers ordinaires, environ douze fois plus grand que le second; c'est le seul auquel on doive s'attacher dans une première étude précédant un essai.

Pour aborder la solution, il faut d'abord remplacer les dilatabilités moyennes par leurs valeurs variables avec la température, et poser

$$(7) \qquad a_1 = \alpha_1 + \beta_1\,\theta \quad , \quad a_2 = \alpha_2 + \beta_2\theta.$$

L'erreur secondaire est égale à la différence entre les variations de marche entre deux températures conventionnelles, 0° et θ^0, et la moitié de la variation dans l'intervalle double, 0° et $2\theta^o$. Nous écrivons symboliquement cette erreur :

$$(8) \qquad S = \left[\frac{\Delta\rho}{\rho}\right]_0^{\theta} - \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta\rho}{\rho}\right]_0^{2\theta}.$$

Introduisant dans cette expression les valeurs de $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ données par l'équation (6) développée par les valeurs (7), on

voit que les grandeurs α_1 et α_2 s'éliminent, de telle sorte que la valeur de l'erreur secondaire se réduit à

$$S = -\frac{3}{2e'}, (\beta_2 - \beta_1)\,\theta^2. \tag{9}$$

Mais le spiral impose à la serge une action déterminée, que nous désignerons par Q, savoir :

$$Q = \frac{\Delta\rho}{\rho\Delta\theta} = -\frac{3}{2e'}(a_2 - a_1). \tag{10}$$

Cette équation, combinée avec la précédente, donne finalement

$$S = \quad Q\,\frac{\beta_2 - \beta_1}{a_2 - a_1}\,\theta^2. \tag{11}$$

Cette dernière équation nous montre que la part de l'erreur secondaire due à la lame est proportionnelle à l'effet exigé d'elle, et proportionnelle au quotient de la différence des termes de second ordre, dans les formules de dilatation, par la différence des dilatabilités moyennes.

893. — **Principe de la correction de l'erreur secondaire.** — Pour pouvoir utiliser la méthode simplifiée que nous avons adoptée, nous devons appliquer d'abord le calcul au balancier ordinaire, puis établir les différences auxquelles conduit toute nouvelle combinaison. Les mesures faites par J.-R. Benoît à l'aide du dilatomètre Fizeau lui ont permis d'établir les formules suivantes pour les dilatabilités moyennes entre 0° et θ° :

Acier	$(10\,400 + 5{,}20\,\theta)\,10^{-9}$
Laiton	$(18\,600 + 5{,}50\,\theta)\,10^{-9}$

En admettant que le spiral exige une correction de 11 secondes par degré et par jour, on trouve que, pour annuler en même temps l'effet du bras, un balancier acier-laiton doit être construit de telle sorte que

$$Q = 12^s{,}3,$$

d'où

$$S = 12{,}3\,\frac{0{,}3}{8200}.$$

Faisant comme à l'ordinaire $\theta = 15°$, on trouve $S = 0{,}1$. La serge du balancier acier-laiton intervient donc pour un

dixième de seconde par jour dans la valeur de l'erreur secondaire, entre 0^0 et 30°. La part du déplacement radial est environ moitié moindre; celle due à la variation du moment d'inertie du bras est encore beaucoup plus petite.

Ainsi, en faisant abstraction de la variation de ρ, l'action compensatrice du balancier acier-laiton est sensiblement linéaire. Partant de ce balancier, on devra donc chercher à corriger par différence la presque-totalité de l'erreur secondaire observée. Celle-ci étant de 2 à 2,5 secondes par jour, on devra choisir, pour la construction d'un balancier à compensation intégrale, des métaux tels que, les coefficents de leurs formules de dilatation étant introduits dans l'équation 11, S en ressorte avec la valeur 2,0 à 2,5.

Les courbes (fig. 4 et 5) nous montrent que l'on peut trouver, parmi les aciers au nickel, plusieurs combinaisons satisfaisant théoriquement à cette condition. Mais, en pratique, le problème limite immédiatement le choix à une région déterminée, celle des alliages de la plus grande stabilité. De plus, les procédés de fabrication du balancier n'admettent guère l'emploi, pour la partie extérieure de la serge, d'un alliage difficilement fusible. La conservation du laiton présente de grands avantages, et la solution devra être, autant que possible, subordonnée à cette condition.

Supposons donc que nous combinions le laiton avec un acier à 44 $^0/_0$ de nickel, pour lequel

$$\alpha = 8{,}508.10^{-6}, \qquad \beta = -\ 0{,}002\ 50.10^{-6}.$$

Introduisant dans l'équation (11) ces valeurs en même temps que celles relatives au laiton, on trouve

$$S = 2{,}2.$$

Cette solution est donc aussi bonne qu'on puisse le désirer pour une première approximation. C'est avec elle qu'ont été faits les premiers essais dont on rendra compte plus loin.

Mais, auparavant, nous pouvons mieux élucider le problème par une construction graphique. Représentons donc par la courbe OS (fig. 10) la variation du module d'élasticité du spiral, par les courbes OA et OL les dilatations de l'acier et du

laiton, les échelles de l'élasticité et de dilatation étant arbitrairement choisies de manière à correspondre à des ordres de grandeur semblables. La différence d'action du balancier sera proportionnelle à la différence des courbes L et A, et

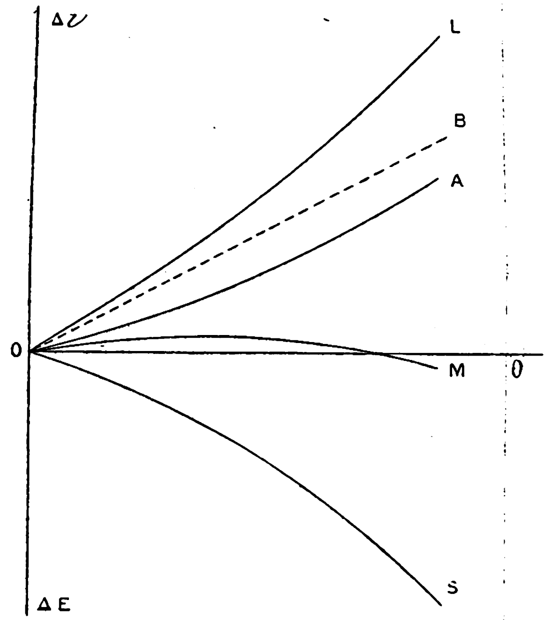


Fig. 10

sera sensiblement représentée par la droite OB. Le résultat global de la compensation sera la somme algébrique de cette droite et de la courbe OS, soit OM. L'erreur secondaire sera la flèche de cette courbe.

Remplaçons maintenant (fig. 11) la courbe OA par OAN, relative à l'acier au nickel choisi. L'action du balancier sera représentée par OB, et la somme algébrique avec OS se confondra avec l'axe des abscisses, ce qui est la condition cherchée.

894. — **Construction et emploi du balancier intégral.** — La théorie dont il vient d'être donné une rapide esquisse ayant été publiée, au printemps 1899, dans le *Journal suisse d'Horlogerie,* deux des premiers chronométriers neuchâtelois, P. Nardin

au Locle et P. Ditisheim à La Chaux-de-Fonds, me firent part du désir qu'ils avaient de tenter l'essai du nouveau balancier, le premier avec des chronomètres de marine, le second avec des pièces de poche. Quelques balanciers furent alors cons-

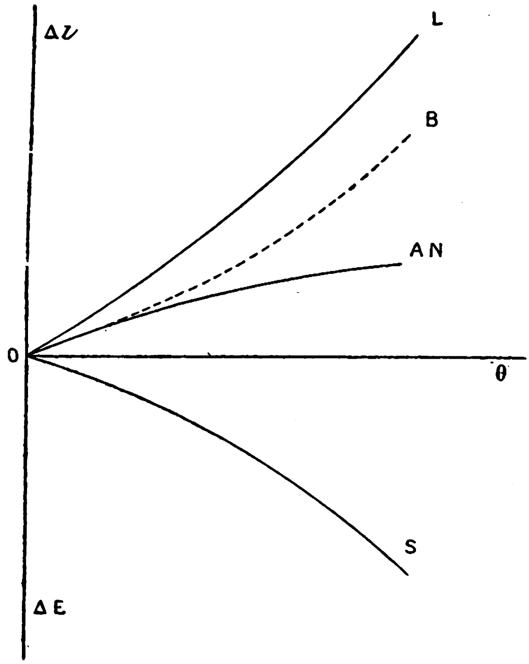


Fig. 11.

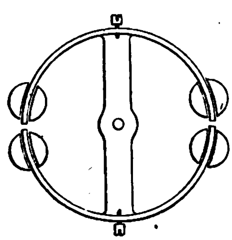
truits, conformément aux indications ci-dessus, par MM. Ferrier et Vaucher à Travers (Suisse) et mis aussitôt à l'essai. Les comparaisons des pièces, faites à l'Observatoire de Neuchâtel sous la direction du Dr Hirsch, montrèrent dès l'abord une concordance si parfaite avec les prévisions du calcul, que le problème de l'erreur secondaire apparut comme entièrement résolu, sans aucune des complications de mécanisme auxquelles il avait été lié jusque-là.

Les marches aux températures moyennes se trouvaient, au dixième de seconde près, dans l'alignement des marches aux extrêmes; de plus, les reprises après les extrêmes étaient parfaites.

Les résultats ainsi obtenus furent rendus publics au cours

de l'année 1900, où ils furent communiqués au Congrès international de Chronométrie, et où les chronomètres eux-mêmes furent exposés à Paris. Les chronométriers s'y intéressèrent vivement, et les expériences furent alors entreprises sur une plus vaste échelle. Elles révélèrent, comme seul défaut du balancier, une trop grande déformabilité de la serge, due au fait que l'acier-nickel employé à sa construction, soumis à la température élevée nécessaire pour le soudage du balancier, prenait une limite élastique très basse. Des additions métallurgiques et un traitement particulier de l'alliage permirent d'obvier à cet inconvénient, de sorte que la solution pratique de la question de l'erreur secondaire semble avoir pris sa forme définitive.

Une remarque s'impose encore. La dilatabilité moyenne de l'alliage que nous avons trouvé résoudre la question étant moindre que celle de l'acier, l'écart avec la dilatation du laiton est plus considérable, et la serge, pour une même action, peut être faite soit plus épaisse, soit plus courte. Dans un cas comme dans l'autre, il en résulte un sérieux avantage supplémentaire. On sait en effet que l'action de la force centrifuge sur la serge d'un balancier est loin d'être négligeable, et que les variations de l'amplitude des oscillations suffisent pour entraîner un notable défaut d'isochronisme entre les grands et les petits arcs (p. 267). On conçoit donc que le nouveau balancier présentera ce défaut à un degré beaucoup moindre que le balancier ordinaire.


Fig. 12.

Dans la pratique, on a préféré conserver à la serge les mêmes dimensions transversales en réduisant sa longueur. Pour les balanciers des chronomètres de poche, on place la coupure en général à 45° du bras. Pour les chronomètres de marine, on pratique la coupure à angle droit du bras ; on a alors quatre lames égales (fig. 12). Ainsi la force centrifuge n'entraîne aucune torsion dissymétrique du balancier.

895. — **Conséquences de l'emploi du balancier intégral.** — La suppression pratique de l'erreur secondaire ayant fait disparaître le dernier défaut de principe des chronomètres, le perfectionnement de ces instruments prit un nouvel intérêt et un nouvel essor. Aussi longtemps, en effet, que cette erreur subsistait, il était sans grande portée pratique de chercher à abaisser beaucoup au-dessous de sa valeur les autres causes d'écart des marches; mais, celle-ci supprimée, on put reprendre avec succès la recherche de la perfection dans la mesure du temps; et c'est ainsi que, dans les concours de chronomètres des Observatoires, on a vu, après la brusque diminution de l'erreur de compensation, la réduction progressive des autres erreurs.

Au bout de peu d'années, on atteignait déjà des résultats très remarquables; c'est ainsi, par exemple, qu'au concours de 1903 de l'Observatoire de Kew, un chronomètre à tourbillon de Paul Ditisheim obtint la cote 94,9, le plus haut chiffre réalisé jusque-là étant 92,7 [1].

Ces nombres ont la signification suivante : les résultats des épreuves sont répartis en trois catégories, se rapportant respectivement aux erreurs de compensation, aux écarts diurnes et aux variations aux positions. On attribue alors, pour la perfection absolue, 20 points aux premières et 40 à chacune des deux autres, soit un total de 100 points pour une pièce dont toutes les marches auraient été rigoureusement égales. Le nombre total des points est donné par la formule

$$\frac{200}{3}(0{,}300 - A) + 20\,(2{,}00 - B) + 4\,(10{,}00 - C)$$

où 0,300, 2,00, 10,00, représentent respectivement les limites pour la compensation, les écarts diurnes et les positions. L'erreur de compensation est rapportée au degré Fahrenheit.

Or, dans le résultat final, le chronomètre n'est pas seul en cause; au degré de perfection où il a été poussé aujourd'hui, les erreurs commises par l'observateur et celles de l'horloge

[1] Un second chronomètre Ditisheim, à ancre cette fois, envoyé à Kew en 1911, s'est classé avec 94,8 points.

ne sont plus négligeables. De plus, à Kew, les observations sont arrondies au quart de seconde, et un calcul approximatif montre qu'un chronomètre parfait n'atteindrait guère plus de 97 ou, au maximum, 98 points.

On peut donc dire que le chronomètre mentionné ci-dessus avait partagé à peu près par la moitié l'intervalle existant entre le meilleur chronomètre observé jusque-là et une pièce théoriquement parfaite.

Ce résultat fit une profonde impression, et donna une nouvelle impulsion à l'essai du balancier intégral. Dès l'année 1902, plus de la moitié des chronomètres de marine, bord et première classe présentés à l'Observatoire de Neuchâtel en étaient munis. En 1904, il faisait une première apparition, en quelques pièces isolées, à Besançon, à Genève, à Hambourg et aux concours de la Marine française. Mais, l'année suivante, les résultats gagnaient en nombre et, aujourd'hui, s'il s'agit de pièces de qualité élevée, on peut dire que le balancier ordinaire est devenu l'exception. Voici, en effet, les proportions respectives résultant des derniers rapports publiés sur les concours dans les observatoires chronométriques de l'Europe continentale :

Besançon 1909-1910	89,0 %
Genève 1911	98,0 »
Hambourg 1910-1911	95,9 »
Neuchâtel 1911 (marine, bord, 1re classe).	95,8 »

On peut ajouter que, pendant les quelques années que dura le concours des montres de bord à l'Observatoire naval de Washington, toutes les pièces présentées par des chronométriers européens étaient munies du balancier intégral; et celles qui sortirent en tête révélèrent constamment une somme d'erreurs moitié moindre que celle des premiers chronomètres à suspension du concours parallèle.

L'Observatoire de Kew est le seul où de semblables pièces soient restées peu nombreuses. Au surplus, depuis quelques années, les rapports de cet Observatoire ne mentionnent plus

qu'exceptionnellement cette particularité de la construction, de telle sorte que la statistique ne saurait en être faite.

Les indications qui précèdent permettent de renvoyer aux rapports des Observatoires chronométriques pour l'étude des marches des pièces munies du balancier intégral.

Le spiral.

896. — Le balancier décrit au chapitre précédent a permis, grâce à l'utilisation rationnelle des singulières propriétés des aciers au nickel, de franchir la dernière étape dans les perfectionnements de principe dont était susceptible le chronomètre, sous la forme qui lui a été donnée au commencement du siècle écoulé. L'application d'autres propriétés de ces mêmes aciers a conduit à un perfectionnement d'un tout autre ordre : la réalisation d'une sérieuse économie dans la construction de la montre ordinaire, par l'emploi d'un spiral auto-compensateur.

La première idée de ce spiral est due à un régleur neuchâtelois, Paul Perret, qui, expérimentant sur un échantillon d'invar que je lui avais remis, découvrit la variation *positive* de son module d'élasticité. La même découverte fut réalisée de façon indépendante peu de temps après par le professeur Marc Thury. En possession de cette propriété nouvelle, Paul Perret me proposa de poursuivre en commun les recherches, qui permirent bientôt d'établir les éléments de la courbe A B N*f* (fig. 7) des variations de l'élasticité en fonction de la teneur, à la température ordinaire. L'application d'un principe que j'avais formulé : celui des états correspondants des aciers au nickel, me permit de tracer la courbe continue pour un seul acier (courbe E″ F″ G″, fig. 3.), dont une portion de grande étendue relative à l'invar a été ultérieurement déterminée par le professeur Ch.-E. Guye.

L'application de ces propriétés des aciers au nickel à la confection d'un spiral compensateur ne nécessite plus que des explications sommaires. La forme de la courbe des variations

de l'élasticité en fonction de la teneur montre qu'il existe des alliages dont la variation est nulle ou très petite, positive ou négative, et qu'un spiral fait au moyen de l'un de ces alliages, convenablement choisi, compensera, par les variations thermiques de son module d'élasticité, l'ensemble des très faibles changements de marche dus aux dilatations du spiral et du balancier monométallique qu'il actionne. (v. p. 323.)

On voit même que deux séries d'alliages répondent au problème; ils contiennent respectivement environ 28 et 45 % de nickel, et des expériences suivies ont été effectivement exécutées en vue d'arriver à leur utilisation pour la fabrication des spiraux compensateurs.

Chacun des groupes d'alliages semblait posséder, pour cet objet, des avantages particuliers, qui auraient pu faire préférer l'un ou l'autre, suivant la nature du problème à résoudre.

Les alliages de la plus faible des deux teneurs sont très peu magnétiques et déjà peu oxydables, deux avantages considérables sur les spiraux d'acier. En revanche, la courbe en fonction des teneurs monte très rapidement, de telle sorte que de très petites variations de cette dernière modifient sensiblement leurs propriétés réglantes; de plus, le maximum correspondant à la valeur nulle de la courbe précédente est très accentué. Si donc le spiral est compensateur à une température déterminée, il donne rapidement un retard notable dès qu'on s'en éearte dans un sens ou dans l'autre. En d'autres termes, ce spiral nécessite un dosage très précis de l'alliage, et laisse subsister une erreur secondaire notable.

En raison de sa teneur beaucoup plus élevée en nickel, l'autre spiral est encore moins oxydable, mais il est sensiblement magnétique, bien que ne gardant pas d'aimantation permanente. L'aspect des deux courbes qui caractérisent la variation des propriétés élastiques en fonction de la teneur et de la température montre, d'autre part, que les alliages de cette catégorie sont moins sensibles que les premiers aux changements de ces éléments; c'est-à-dire que les spiraux

seront plus réguliers comme propriétés compensatrices, et que leur erreur secondaire sera moins considérable.

La connaissance générale des propriétés des aciers au nickel, que je possédais au début des études faites en commun avec Paul Perret, m'avait permis de prévoir assez exactement ces qualités respectives des deux catégories de spiraux. Des essais furent faits dans les deux teneurs, et Paul Perret put, grâce à sa grande habileté, reconnaître que les spiraux de la seconde possédaient des qualités réglantes supérieures à ceux de la première. Cependant les tentatives de fabrication se butèrent à une difficulté apparemment insurmontable : les spiraux étaient très mous; un régleur d'une habileté consommée pouvait en tirer de bons résultats, mais ils ne pouvaient être mis aux mains de la généralité des régleurs.

Les études se concentrèrent donc sur la première catégorie, et toutes les expériences faites depuis les découvertes fondamentales ont été conduites de manière à réduire les difficultés de l'obtention de teneurs rigoureuses et à relever la limite élastique. Après de longues années d'efforts, ce dernier résultat a été obtenu de manière à donner toute satisfaction aux régleurs. Aussi le spiral compensateur s'est-il répandu en grande quantité dans la fabrication horlogère.

Quelques indications concernant son erreur secondaire vont d'ailleurs nous permettre de délimiter immédiatement le domaine de son emploi.

Si la courbe générale E″ F″ G″ (fig. 3) était tracée à l'échelle, on verrait que, en isolant un intervalle de 30 degrés symétrique par rapport au maximum, la flèche de la portion ainsi séparée serait telle qu'elle correspondrait à une erreur secondaire de 20 secondes environ par jour. C'est donc d'un peu plus de deux minutes par semaine que varierait la marche d'une montre munie d'un semblable spiral, si elle était maintenue, dans des semaines successives, à des températures constantes de 0°, 15° et 30°. Dans l'emploi du spiral d'acier ordinaire avec balancier laiton, les écarts de marche seraient, pour les mêmes écarts de température et les mêmes durées, de 20 mi-

nutes environ, avec progression constante, soit de 40 minutes entre les extrêmes. Ainsi, dans tout l'intervalle 0—30°, l'application du spiral compensateur, supposé réglé en moyenne, réduit au vingtième environ l'erreur de compensation; c'est là un résultat qui justifie pleinement son emploi. Mais, dans la pratique, deux conditions modifient légèrement le rapport qui vient d'être établi. La première est que les spiraux ne sont pas exactement réglés sur l'intervalle 0°—30°; la seconde est que cet intervalle est trop considérable pour servir à établir une comparaison. En effet, même si l'on considère des températures instantanées, et sauf circonstances exceptionnelles, les écarts ont une amplitude inférieure à celle que nous avons supposée; et, surtout, les moyennes des températures pour une longue période sont beaucoup plus voisines.

Cette dernière circonstance est à l'avantage du spiral compensateur: En effet, les écarts de marche étant proportionnels au carré de la température, en raison de la forme à peu près parabolique de la courbe au voisinage de son sommet, toute réduction de l'intervalle serre ces écarts beaucoup plus que dans le spiral ordinaire. Ainsi, pour un intervalle de 20 degrés, la variation de marche ne serait que des 4/9 de celle que nous avons admise, soit de 1 minute par semaine seulement, tandis qu'elle atteindrait, pour un spiral d'acier, les deux tiers de celle qui a été trouvée.

D'un autre côté, les écarts de la bonne teneur rejettent le maximum vers les températures élevées ou basses et augmentent l'écart total.

Mais on peut, par un choix judicieux des applications, réduire au mininum les inconvénients de ce défaut inévitable. Il suffit d'attribuer aux fabrications destinées aux pays chauds ceux des spiraux pour lesquels le maximum est situé dans la partie supérieure de l'intervalle, et vice-versa. Plusieurs fabricants se sont décidés à faire une semblable attribution et en ont tiré un bon parti.

Le spiral compensateur supprime le balancier compensateur, trop coûteux pour la montre à bon marché, et réduit,

comme nous l'avons vu, à 5 % environ les écarts de marche dans les conditions défavorables, par rapport à ce que donne le spiral d'acier non compensé.

Il est intéressant de noter que ce perfectionnement de la montre, d'une grande portée économique, est une conséquence d'un délicat phénomène d'équilibre dans une *solution solide* de fer et de nickel.

La suspension rotative.

897. — On a vu apparaître, il y a quelques années, des mécanismes d'horlogerie utilisant, pour leur régulation, l'oscillation d'une masse suspendue à l'extrémité d'un fil ou d'un ruban portant la fourchette d'échappement, et recevant, par son intermédiaire, une impulsion à chaque passage pair dans la position d'équilibre. L'avantage de ce dispositif par rapport à ceux des horloges à pendule est que la durée propre d'oscillation de la masse peut être rendue très grande, relativement à celle des régulateurs ordinaires, de telle sorte que le mécanisme de transmission des efforts du ressort est considérablement simplifié. D'autre part, la lenteur de l'oscillation et le faible entraînement du support ont pour conséquence une très faible consommation de l'énergie d'oscillation de la masse suspendue, de telle sorte qu'un ressort peut emmagasiner pour un temps très long l'énergie dépensée par l'horloge. On construit couramment de semblables pièces dont la marche dure plus d'une année avec un seul remontage.

Mais ces mécanismes ont présenté, jusqu'à ces derniers temps, un défaut capital. La variation du module de torsion des métaux et alliages usuels en fonction de la température est plus considérable que celle du module de flexion, à peu près dans le rapport de 4 à 3. Le ruban de suspension jouant, au point de vue du réglage, le même rôle que le spiral, les changements de marche des horloges qui en sont munies sont plus considérables dans la même proportion. Cette circonstance enlevait à ces horloges tout intérêt; car, si l'on était

dispensé de les remonter fréquemment, en revanche on était obligé de les remettre à l'heure à des intervalles très rapprochés.

Les mécanismes compensateurs appliqués à ces horloges n'ont eu que peu de succès. Coûteux par rapport à l'ensemble du mécanisme, et, de plus, disposés de telle sorte qu'ils augmentaient considérablement la résistance éprouvée par la masse oscillante dans l'air, ils ne pouvaient résoudre que très incomplètement le problème.

Les aciers au nickel ont, cette fois encore, permis de l'aborder avec succès. Pour eux comme pour les autres métaux ou alliages, le changement du module de torsion est plus considérable que celui du module de flexion; mais il s'annule aussi pour deux alliages déterminés, de teneurs voisines de celles pour lesquelles les changements du module de flexion passent par zéro (fig. 7, courbe CDN*t*). Comme pour les spiraux, on trouvera donc, très près de ces alliages, des teneurs telles que les changements correspondants du module compensent tous ceux qui tiennent à d'autres causes.

De telles suspensions participent naturellement aux défauts signalés pour les spiraux : difficulté de réaliser la teneur la meilleure, et erreur secondaire relativement considérable. Mais le problème comporte, par sa nature même, une solution simple. On peut, en effet, prendre au-dessus et au-dessous de zéro deux alliages dont on constitue des rubans, lesquels, associés bout à bout, fournissent une suspension compensatrice des dilatations. Ces alliages étant choisis de façon à se trouver, aux températures ordinaires, assez loin du maximum du module, varieront suivant une fonction de faible courbure, et la retouche successive des longueurs relatives des deux rubans permettra d'approcher autant qu'on voudra de la bonne compensation. Le réglage est ici analogue à celui que l'on obtient par le déplacement des vis d'un balancier, mais d'une réalisation beaucoup plus facile; il comporte de multiples combinaisons; au moyen de rubans de sections diverses, on peut, avec les mêmes alliages, modifier les longueurs rela-

tives des deux éléments de la suspension, de manière à situer commodément la pince qui les relie, et donner à la totalité de l'organe réglant une hauteur lui assurant une belle amplitude d'oscillation.

J'ai établi dès l'année 1905 un semblable réglage, dont la mise sur pied industrielle a été ensuite entreprise par M. Grivolas à Paris; et, grâce à l'adoption de cette suspension, la pendule dite 400 jours est devenue un instrument relativement précis de mesurer du temps.

Coup d'œil rétrospectif.

898.—Les phénomènes singuliers et inattendus par lesquels se manifeste la variation d'équilibre interne des aciers au nickel ont permis, comme nous venons de le voir, d'apporter aux diverses branches de l'horlogerie de notables perfectionnements.

D'abord le pendule. L'emploi d'un alliage peu ou pas dilatable a donné à l'organe oscillant des horloges, sans l'addition d'autres organes spéciaux, l'invariabilité dans la durée d'oscillation que l'on n'obtenait autrefois que par la construction compliquée et délicate du gril ou par l'emploi d'un liquide, le mercure, avec les multiples inconvénients duquel on s'était accommodé, croyant qu'il était impossible d'arriver à une simplicité plus grande. Aujourd'hui, le pendule compensé ne se distingue pas, à première vue, du pendule non compensé. A la différence près du prix de l'invar rapporté à l'acier, il n'est pas plus coûteux que l'ancien pendule, tout en donnant des résultats bien supérieurs à ceux des pendules compensés des récentes décades. L'absence de pièces mobiles et l'action négligeable de différences de température dans la hauteur en sont les raisons principales. D'un autre côté, les changements que subit l'invar dans le cours du temps, et qui, d'un autre ordre de grandeur, auraient constitué un sérieux obstacle à l'emploi du nouveau pendule dans les horloges de précision, se trouvent assez faibles pour n'être en aucun cas gênants.

L'emploi du pendule à tige d'invar s'est imposé pour toutes les catégories d'horloges prétendant à quelque exactitude : aux meilleures, il a fourni une solution très parfaite d'un problème délicat; aux autres, il a permis une compensation économique.

L'anomalie d'élasticité des aciers au nickel a fait, de même, bénéficier de la compensation des montres dont le prix l'excluait autrefois; elle a amélioré, dans une proportion très considérable, sans renchérissement appréciable, les marches de toute une catégorie de pièces dont le nombre est annuellement de plusieurs millions. En même temps, l'emploi du spiral d'acier au nickel a apporté à ces montres deux perfectionnements jadis coûteux : ce spiral est, en effet, peu oxydable et non-magnétique.

La même anomalie, sous une forme différente, a permis à une catégorie spéciale d'instruments de mesure du temps, — les horloges à masse oscillante suspendue, — d'entrer dans le domaine de la pratique par une amélioration indispensable de leurs marches.

Enfin, la chronométrie de haute précision a pu, à son tour, subir un perfectionnement inattendu : la suppression de l'erreur secondaire, qui intéresse toutes les pièces susceptibles de marcher à 1 ou 2 secondes près par jour. Ces dernières ont été amenées à un degré de perfection tel que de nouveaux progrès ne peuvent être réalisés que par de lentes améliorations de détail.

Le seul mécanisme qui n'ait tiré aucun bénéfice des aciers au nickel est la montre moyenne, qui ne supporte pas les variations actuelles du spiral compensateur, et pour laquelle la suppression de l'erreur secondaire constituerait un raffinement bien inutile. Mais il ne faut pas désespérer de voir, grâce aux progrès du spiral compensateur, le nombre de ces montres se réduire, et les procédés de réglage appliqués à la

montre ordinaire empiéter sérieusement sur le domaine immédiatement supérieur.

L'ensemble de ces progrès est fondé sur l'utilisation d'une anomalie métallurgique dans laquelle se combinent les propriétés du fer avec celles des solutions, et dont quatre particularités ont permis de résoudre autant de problèmes différents. Les conséquences en ont été considérables ; la découverte d'où procède leur connaissance fut une suite directe des recherches entreprises en vue de perfectionner la construction des étalons de longueur; les progrès horlogers qui viennent d'être exposés en ont constitué jusqu'ici la plus importante des conséquences étrangères à leur but primitif.

ANNEXE I

Développement de l'intégration, page 194.

La vitesse angulaire d'un balancier étant donnée par la relation

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{\frac{M}{A}} \cdot \sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2 + \frac{2\,P\lambda}{M}(\cos\alpha - \cos\alpha_0)},$$

pour obtenir la durée d'une oscillation simple, nous avons donc à calculer l'intégrale

$$(1) \quad T = \sqrt{\frac{A}{M}} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2 + \frac{2\,P\lambda}{M}(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}},$$

α_0 étant l'angle d'une demi-amplitude.

Pour simplifier l'écriture nous poserons

$$\frac{P\lambda}{M} = \varepsilon.$$

ε est une quantité très petite dans le cas d'un balancier bien fait et, en pratique, on a $\varepsilon < 1$. Nous supposerons de plus que les puissances de ε supérieures à la première sont négligeables.

Nous pouvons donc écrire la relation (1) sous la forme

$$(2) \quad T = \sqrt{\frac{A}{M}} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2 + 2\varepsilon(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}}.$$

Considérons d'abord l'expression

$$\frac{1}{\alpha_0^2 - \alpha^2 + 2\,\varepsilon\,(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}.$$

C'est une fonction paire de α qui admet les deux infinis α_0 et $-\alpha_0$, du premier ordre chacun, correspondant aux

valeurs limites de l'intervalle $(-\alpha_0, \alpha_0)$. Par suite nous pouvons écrire

$$\frac{1}{\alpha_0{}^2 - \alpha^2 + 2\varepsilon(\cos\alpha - \cos\alpha_0)} = \frac{a}{\alpha_0{}^2 - \alpha^2} + b + c\alpha^2 + d\alpha^4 + \ldots,$$

$a, b, c, \ldots$ étant des coefficients qui se détermineraient de proche en proche.

En prenant la racine carrée des deux membres, on voit facilement que l'on obtient un développement de la forme

$$(3) \quad \frac{1}{\sqrt{\alpha_0{}^2 - \alpha^2 + 2\varepsilon(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}} = \frac{A}{\sqrt{\alpha_0{}^2 - \alpha^2}} + (B + C\alpha^2 + D\alpha^4 + \ldots)\sqrt{\alpha_0{}^2 - \alpha^2},$$

A, B, C,... étant des fonctions de α_0 et ε que nous allons calculer.

Déterminons d'abord A. La formule (3), nous donne

$$A = \lim_{\alpha=\alpha_0}\left[\sqrt{\frac{\alpha_0{}^2 - \alpha^2}{\alpha_0{}^2 - \alpha^2 + 2\varepsilon(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}}\right].$$

D'où

$$A = \sqrt{\frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \varepsilon\sin\alpha_0}}.$$

Nous allons maintenant déterminer de proche en proche les coefficients B, C, D,... En élevant au carré les deux membres de la relation (3), puis faisant disparaître les dénominateurs, remplaçant $\cos\alpha$ par son développement en série et égalant les coefficients des mêmes puissances de α dans les deux membres, nous obtenons successivement :

$$B = \frac{1}{\alpha_0{}^2}\left(\frac{\alpha_0}{\sqrt{\alpha_0{}^2 - 2\varepsilon\cos\alpha_0 + 2\varepsilon}} - A\right),$$

$$C = \frac{1}{2(A + B\alpha_0{}^2)} \times \left\{ B^2 + \frac{A^2(1+\varepsilon) - 1 + (2A + B\alpha_0{}^2)B[\alpha_0{}^2 - 2\varepsilon\cos\alpha_0 + 2\varepsilon + \alpha_0{}^2(1+\varepsilon)]}{\alpha_0{}^2(\alpha_0{}^2 - 2\cos\alpha_0 + 2\varepsilon)} \right\},$$

$$D = \frac{1}{2(A + B\alpha_0{}^2)} \Big\} 2BC +$$

$$\frac{-A^2\frac{2\varepsilon}{4!} - \left(1 + \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{4!}\alpha_0{}^2\right)(2A + B\alpha_0{}^2)B + [\alpha_0{}^2 - 2\varepsilon\cos\alpha_0 + 2\varepsilon + \alpha_0{}^2(1+\varepsilon)].[2C(A + B\alpha_0{}^2) - B^2]}{\alpha_0{}^2(\alpha_0{}^2 - 2\varepsilon\cos\alpha_0 + 2\varepsilon)} \Big\}.$$

. . . .

En développant ces valeurs de A, B, C,... en séries par rapport à ε et α_0 et en négligeant les termes renfermant les

puissances supérieures de ε à partir de la deuxième, ε étant supposé très petit, nous aurons successivement :

$$(4)\quad \begin{cases} A = 1 - \dfrac{\varepsilon}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3!}\alpha_0^2 + \dfrac{1}{5!}\alpha_0^4 - \dfrac{1}{7!}\alpha_0^6 + \dots\dots\right), \\ B = \varepsilon\left(-\dfrac{1}{4!} + \dfrac{2}{6!}\alpha_0^2 - \dfrac{3}{8!}\alpha_0^4 + \dfrac{4}{10!}\alpha_0^6 - \dots\dots\right), \\ C = \varepsilon\left(\dfrac{1}{6!} - \dfrac{2}{8!}\alpha_0^2 + \dfrac{3}{10!}\alpha_0^4 - \dfrac{4}{12!}\alpha_0^6 + \dots\dots\right), \\ D = \varepsilon\left(-\dfrac{1}{8!} + \dfrac{2}{10!}\alpha_0^2 - \dfrac{3}{12!}\alpha_0^4 + \dfrac{4}{14!}\alpha_0^6 - \dots\dots\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

En remplaçant $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2 + 2\varepsilon(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}}$ par sa valeur (3) dans la relation (2) nous obtenons pour T l'expression suivante :

$$(5)\quad T = \sqrt{\frac{A}{M}}\left(A\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2-\alpha^2}} + B\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\sqrt{\alpha_0^2-\alpha^2}\,d\alpha + C\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\alpha^2\sqrt{\alpha_0^2-\alpha^2}\,d\alpha + D\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\alpha^4\sqrt{\alpha_0^2-\alpha^2}\,d\alpha + \dots\dots\right).$$

Or, on a :

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2-\alpha^2}} = \pi,$$

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\sqrt{\alpha_0^2-\alpha^2}\,d\alpha = \frac{\pi}{2}\alpha_0^2,$$

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\alpha^2\sqrt{\alpha_0^2-\alpha^2}\,d\alpha = \frac{\pi}{2^3}\alpha_0^4,$$

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\alpha_0^4\sqrt{\alpha_0^2-\alpha^2}\,d\alpha = \frac{\pi}{2^4}\alpha_0^6,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

et, en général, à partir de $n = 1$,

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\alpha^{2n}\sqrt{\alpha_0^2-\alpha^2}\,d\alpha = \frac{1.3.5\dots\dots(2n-1)}{2.4.6\dots\dots(2n+2)}\pi\,\alpha_0^{2n+2}$$

Par suite, en remplaçant dans la relation (5) les intégrales, ainsi que les quantités A, B, C,..... par leur valeur, et remettant $\frac{P\lambda}{M}$ à la place ε, on obtient, toutes réductions faites, pour la valeur approchée de la durée d'une oscillation simple du balancier :

$$T = \pi\sqrt{\frac{A}{M}} \times \left\{1 - \frac{P\lambda}{M}\left[\frac{1}{2} - \frac{\alpha_0^2}{1^3.2(1)^2} + \frac{\alpha_0^4}{2^5.3(1.2)^2} - \frac{\alpha_0^6}{2^7.4(1.2.3)^2} + \dots\right]\right\}.$$

Henri Krebs.
Privat-Docent à l'Université de Neuchâtel.

ANNEXE II

Nous avons fait remarquer que la planche 6 (Ier volume) ne correspond pas au texte du paragraphe 447 en ce sens que le milieu des leviers ne se trouve pas à égale distance du centre de l'ancre. Le tracé ne répond pas à la dénomination d'*ancre à leviers équidistants*, mais bien à un système intermédiaire entre les repos et les leviers équidistants.

Afin de rectifier cette inadvertance, nous avons introduit au deuxième volume une nouvelle planche 6 répondant à l'appellation indiquée. Le tracé en est aisé à comprendre ; nous le décrirons succinctement.

La roue a 15 dents ; elle décrit donc un angle de 11°, plus 1° de chute, pendant une oscillation du balancier (445). L'angle de levée de l'ancre est de 10°, comprenant 1° de repos. En

négligeant l'angle de recul de la roue pendant le dégagement, celle-ci parcourra donc un angle de 11° pendant que l'ancre reçoit l'impulsion et se lève de 9°.

Partageant les angles de 11° (roue) et de 9° (ancre) de façon à attribuer les deux cinquièmes de leur valeur à la dent et les trois cinquièmes aux leviers, on aura la distribution suivante :

$$\begin{matrix} {}^2/_5 \times 11^\circ = 4^\circ{,}4 & \multirow{2}{*}{et} & {}^2/_5 \times 9^\circ = 3^\circ{,}6 \\ {}^2/_5 \times 11^\circ = 6^\circ{,}6 & & {}^3/_5 \times 9^\circ = 5^\circ{,}4 \end{matrix}$$

L'angle de 6°,6 est partagé en deux parties égales de part et d'autre des rayons de la roue situés à 30° de la ligne des centres. L'angle de 4°,4 viendra compléter ensuite l'angle parcouru par la roue à chaque impulsion.

Après avoir représenté l'angle de repos et l'angle de tirage du *levier d'entrée* et l'arc de cercle décrit par l'extrémité du plan d'impulsion devant passer à la distance angulaire de 6°6, du point de repos, on marquera un angle de $3^\circ\, {}^3/_5 = 3^\circ{,}6$ à partir de la droite joignant le centre de l'ancre au point de la circonférence de la roue située à la distance 6°,6 du point de repos.

L'intersection du côté de cet angle de $3^\circ\, {}^3/_5$ avec l'arc précédemment décrit donnera l'extrémité de la surface d'impulsion de la dent dont le premier point est connu. La dent peut dès lors être tracée dans la position correspondant à la fin de l'impulsion.

A partir du même côté de l'angle de $3^\circ\, {}^3/_5$, un angle de 10°, représentant le parcours total de l'ancre, permettra de déterminer la direction et la longueur de la surface d'impulsion du levier d'entrée dans sa position inférieure.

Le *levier de sortie* se détermine plus simplement encore, puisque nous possédons déjà la surface d'impulsion de la dent qui sera représentée également à la fin de son parcours de 11°. Du point de repos, on marquera l'angle parcouru par l'ancre, soit $9^\circ + 1^\circ = 10^\circ$; on tracera l'angle de tirage comme dans chaque construction et on obtiendra en longueur et en direc-

tion la projection du plan d'impulsion du levier de sortie de l'ancre.

Ces quelques indications suffisent pour faire comprendre le tracé complet, qui ne présente aucune difficulté de construction.

H. G.

TABLE DES MATIÈRES DU SECOND VOLUME

CHAPITRE VII

Echappement à cylindre.

CHAPITRE VIII

Echappement duplex.

CHAPITRE IX

Echappement à détente.

CHAPITRE X

Théorie du règlage.

TABLE DES PLANCHES

1er volume.

2e volume.

TABLE DES PORTRAITS

1er volume.

2e volume.

ERRATA

Premier volume.

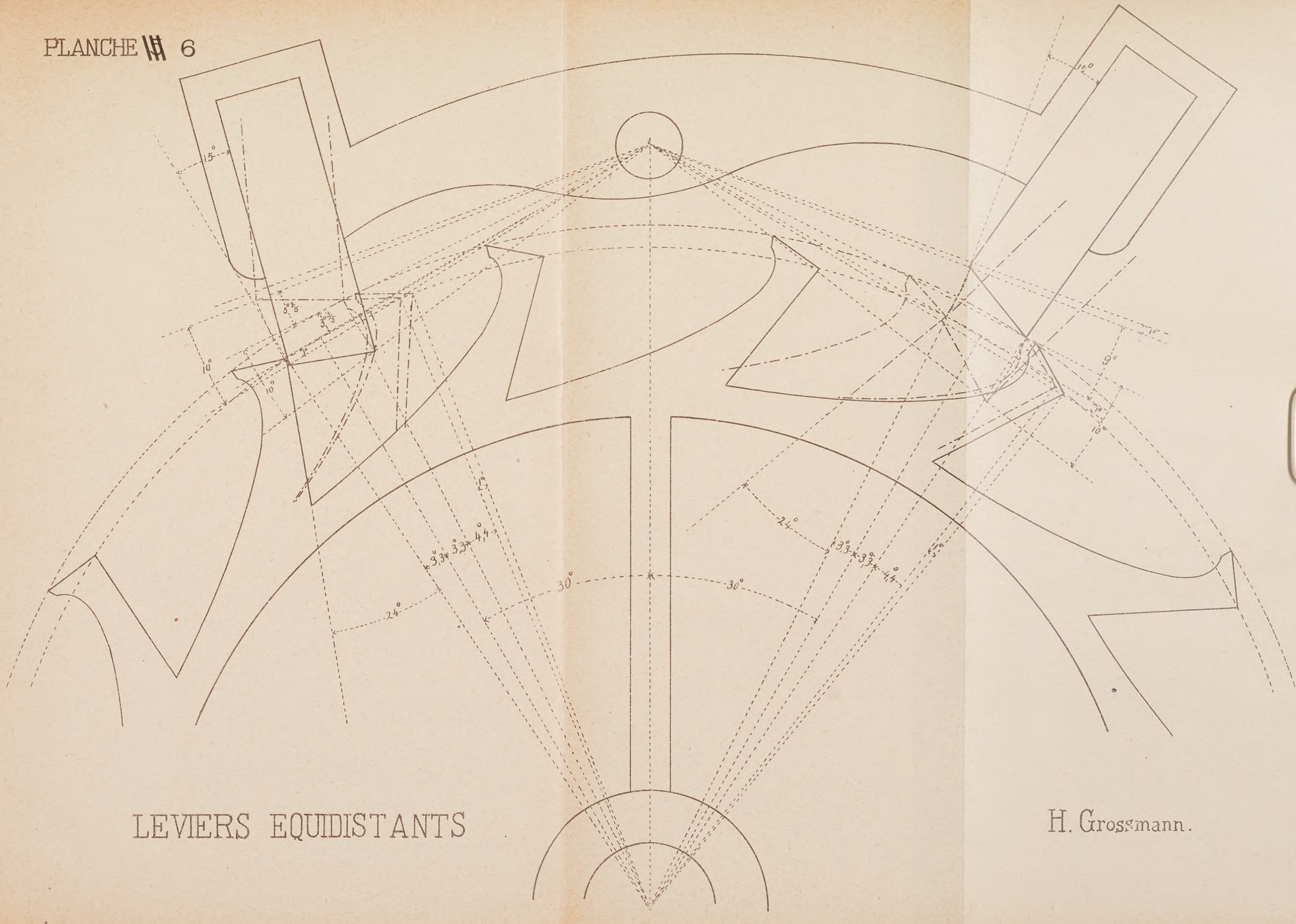
Page 68. — Ligne 1. — Lire *moment* au lieu de *mouvement*.
» 86. — Ligne 2. — Formule (2), dernière lettre, lire r' au lieu de r''.
» 88. — Ligne 7. — Lire - 2 r' dr', au lieu de 2 r' dr'.
» 148. — Ligne 8. — Lire *barillet* au lieu de *balancier*.
» 180. — Ligne 6. — Lire a6, au lieu de *ab*.
» 233. — Figure 77. — tOa, il faut α, au lieu de $1/2\,\alpha$.
» 371. — Avant-dernière ligne. Il faut d'*entrée*, au lieu de *sortie*.
» 399. — Ligne 14. — Il faut lire levier *d'entrée que celui de sortie*, au lieu de *sortie que celui d'entrée*.

Planche 12. — La tangente aux cercles développés devrait passer par le point C.

Second volume.

Page 217.— 4me ligne à partir du bas de la page.— Lire *courbe terminale* au lieu de *courbes terminales*.
» 222.— 5me ligne.— Lire *courbe terminale* au lieu de *courbes terminales*.

PLANCHE 6

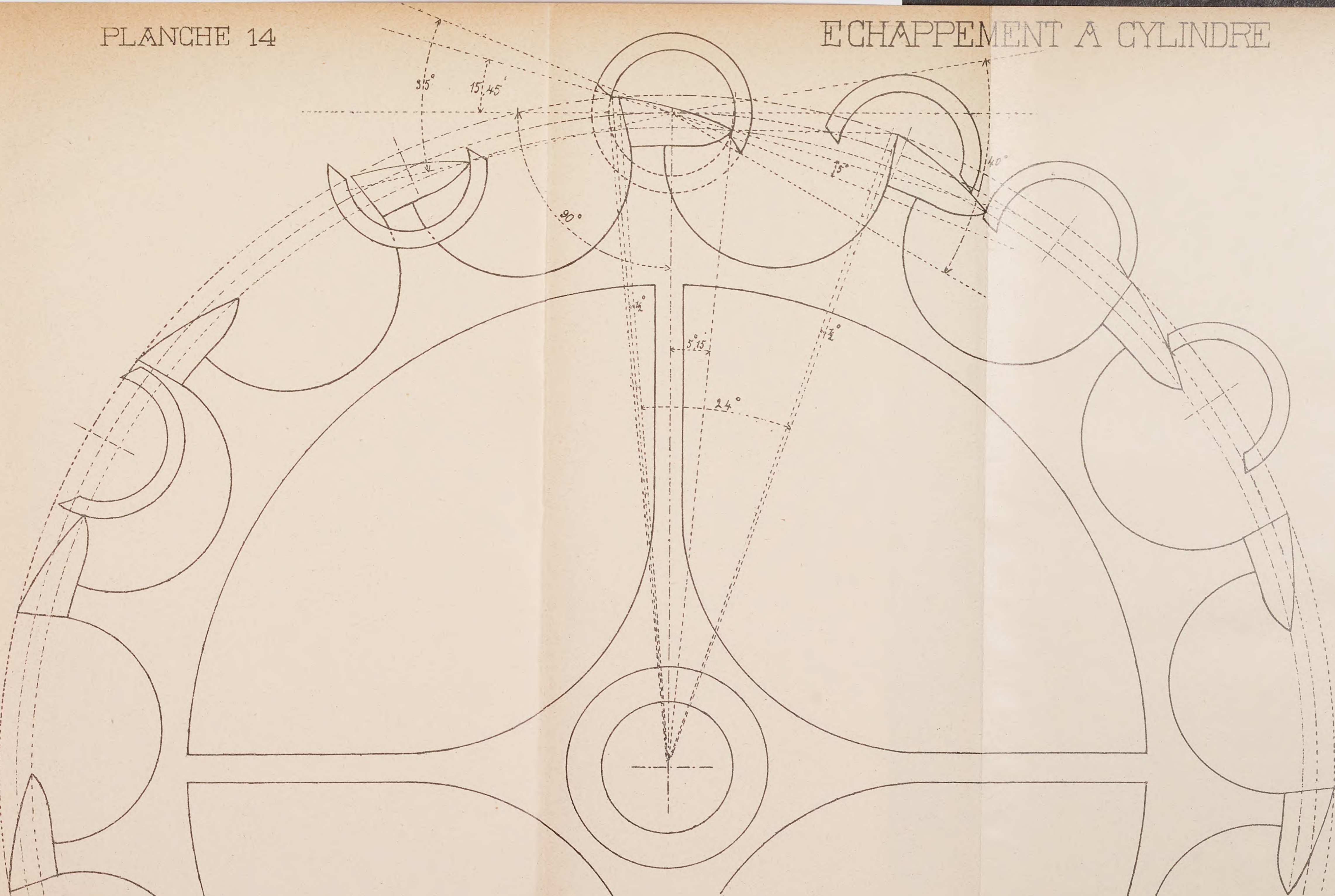


LEVIERS EQUIDISTANTS

H. Grossmann.

PLANCHE 14

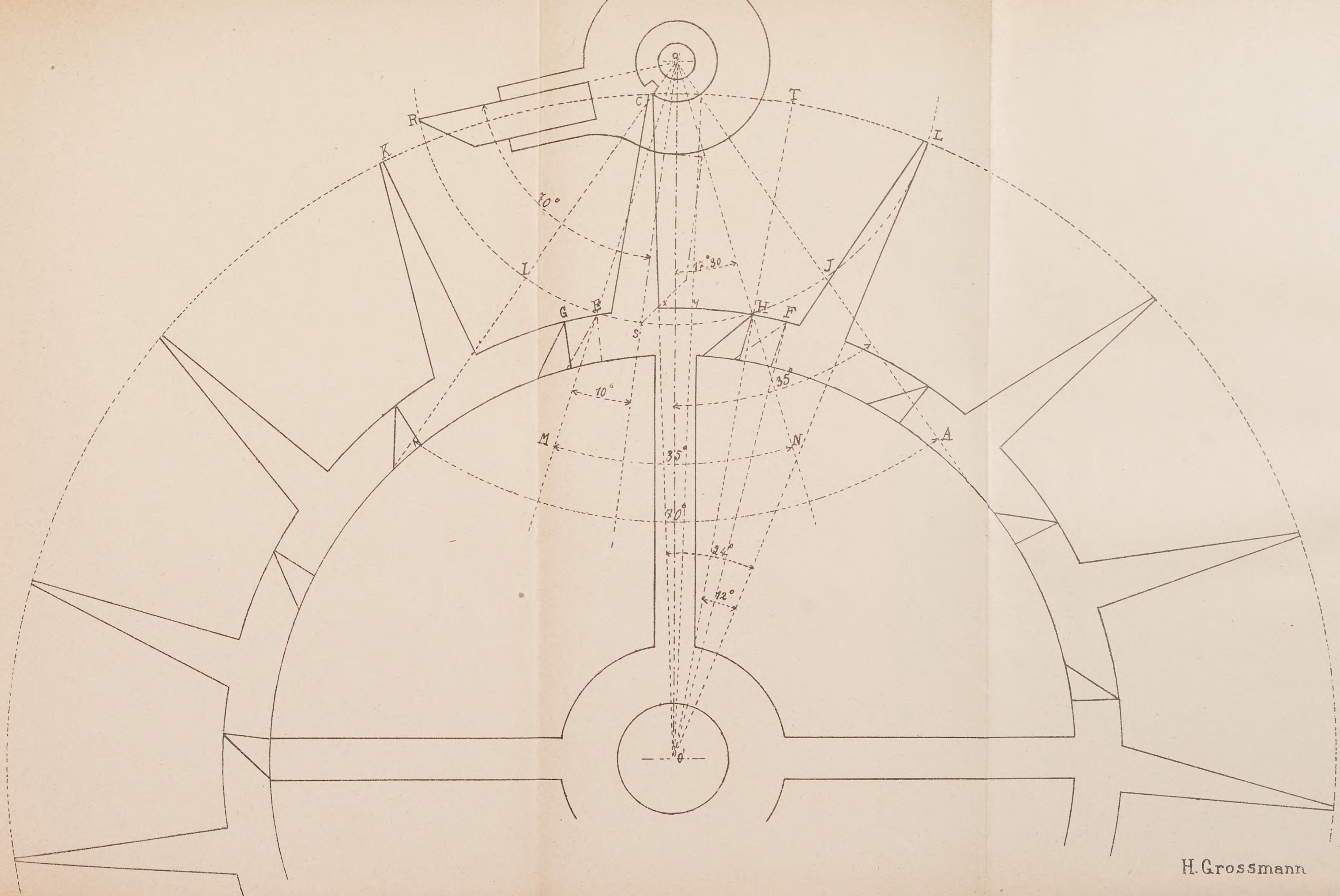
ECHAPPEMENT A CYLINDRE



H. Grossmann

PLANCHE 15

ECHAPPEMENT DUPLEX



H. Grossmann

ÉCHAPPEMENT A COURTE BASCULE

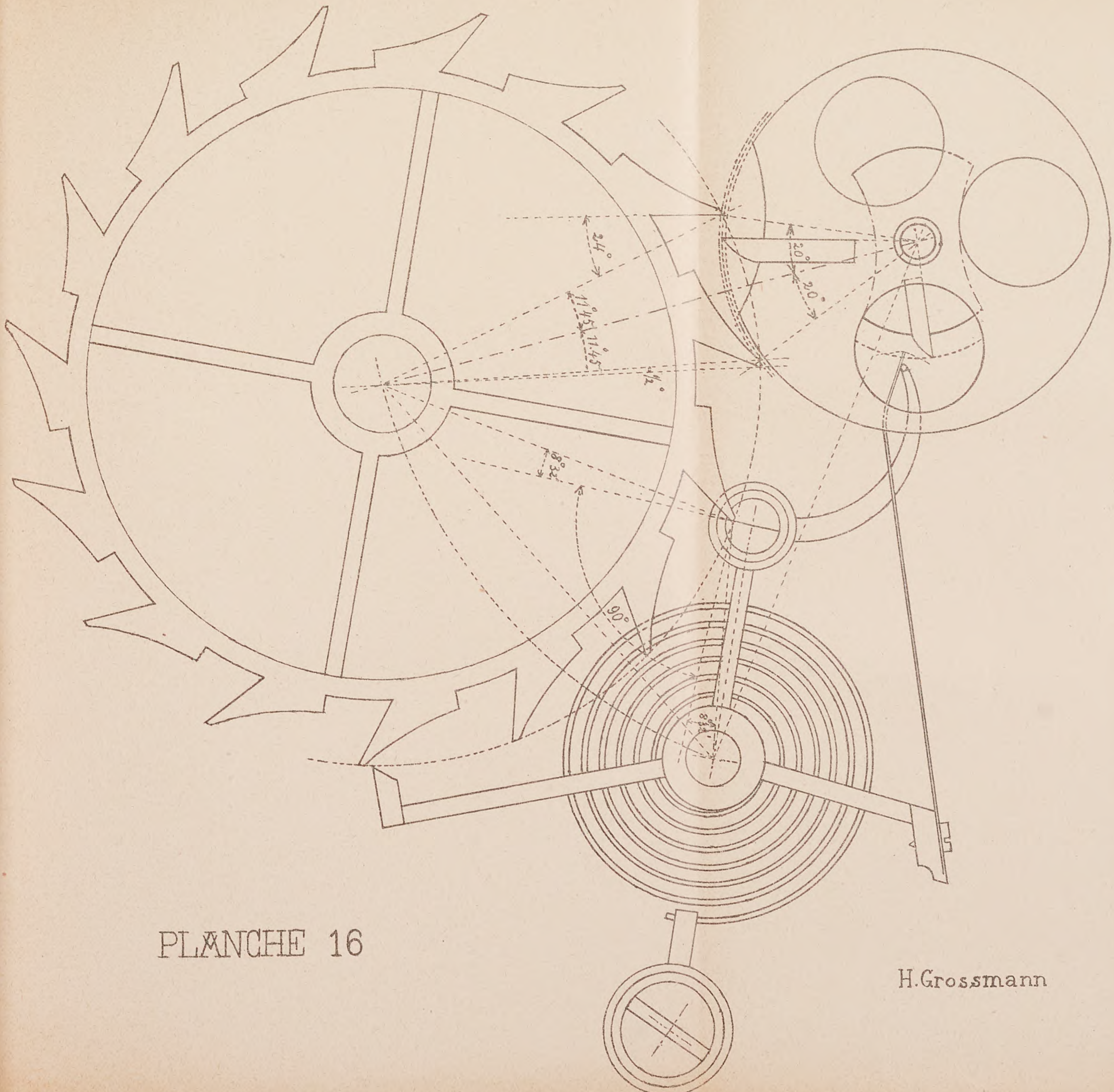
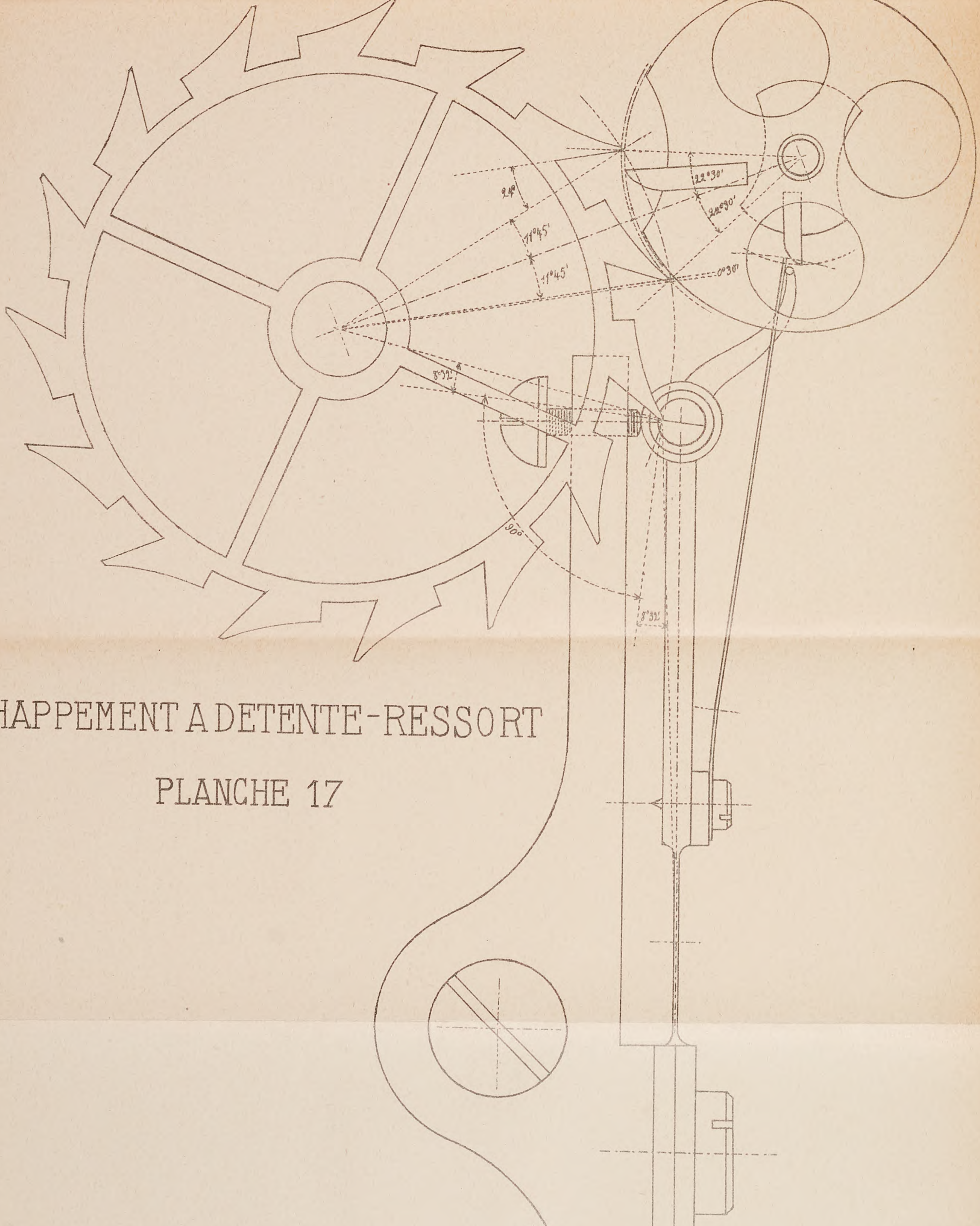


PLANCHE 16

H.Grossmann



ECHAPPEMENT A DETENTE-RESSORT

PLANCHE 17

H. Grossmann

PLANCHE ~~III~~ 18

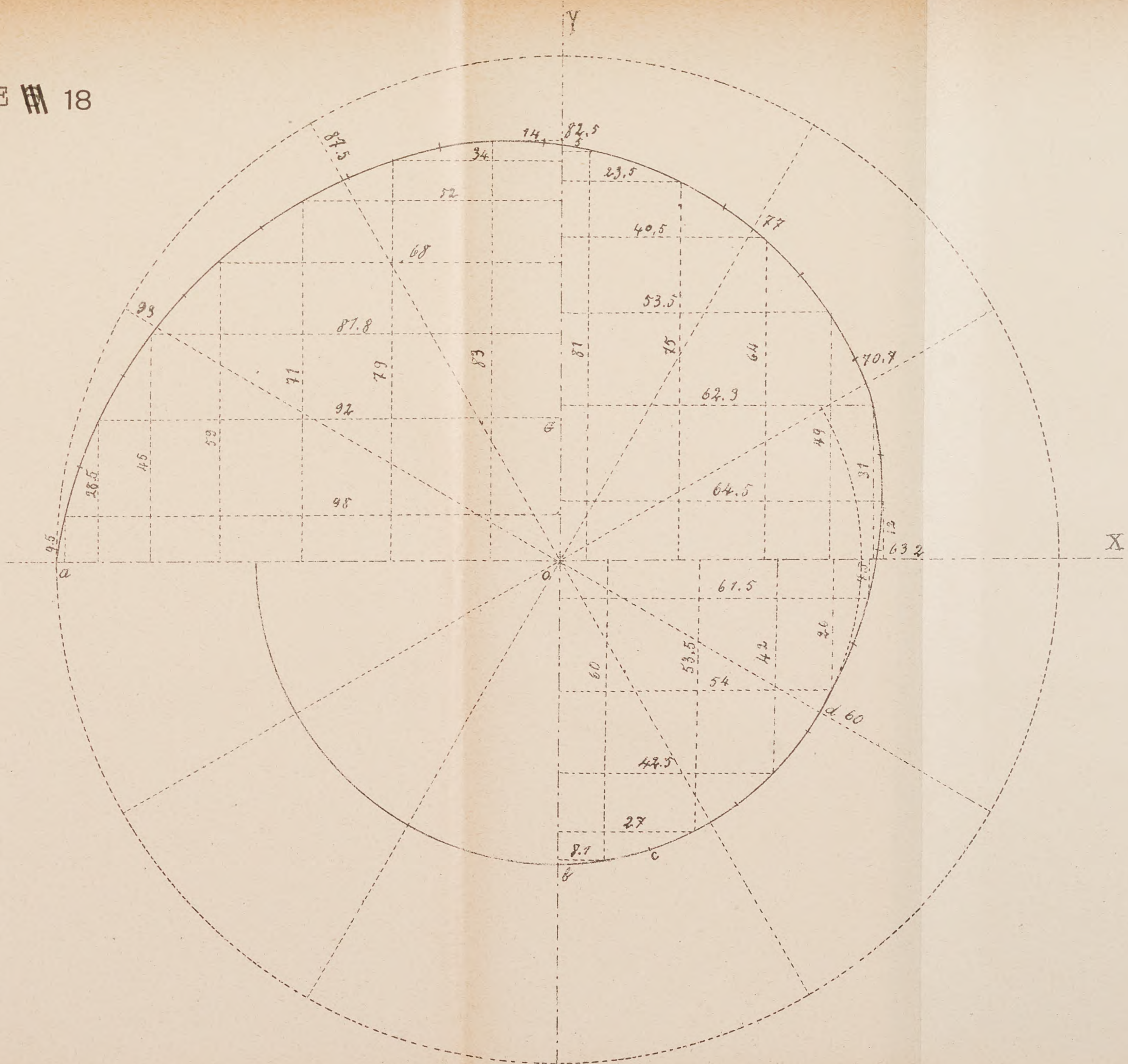
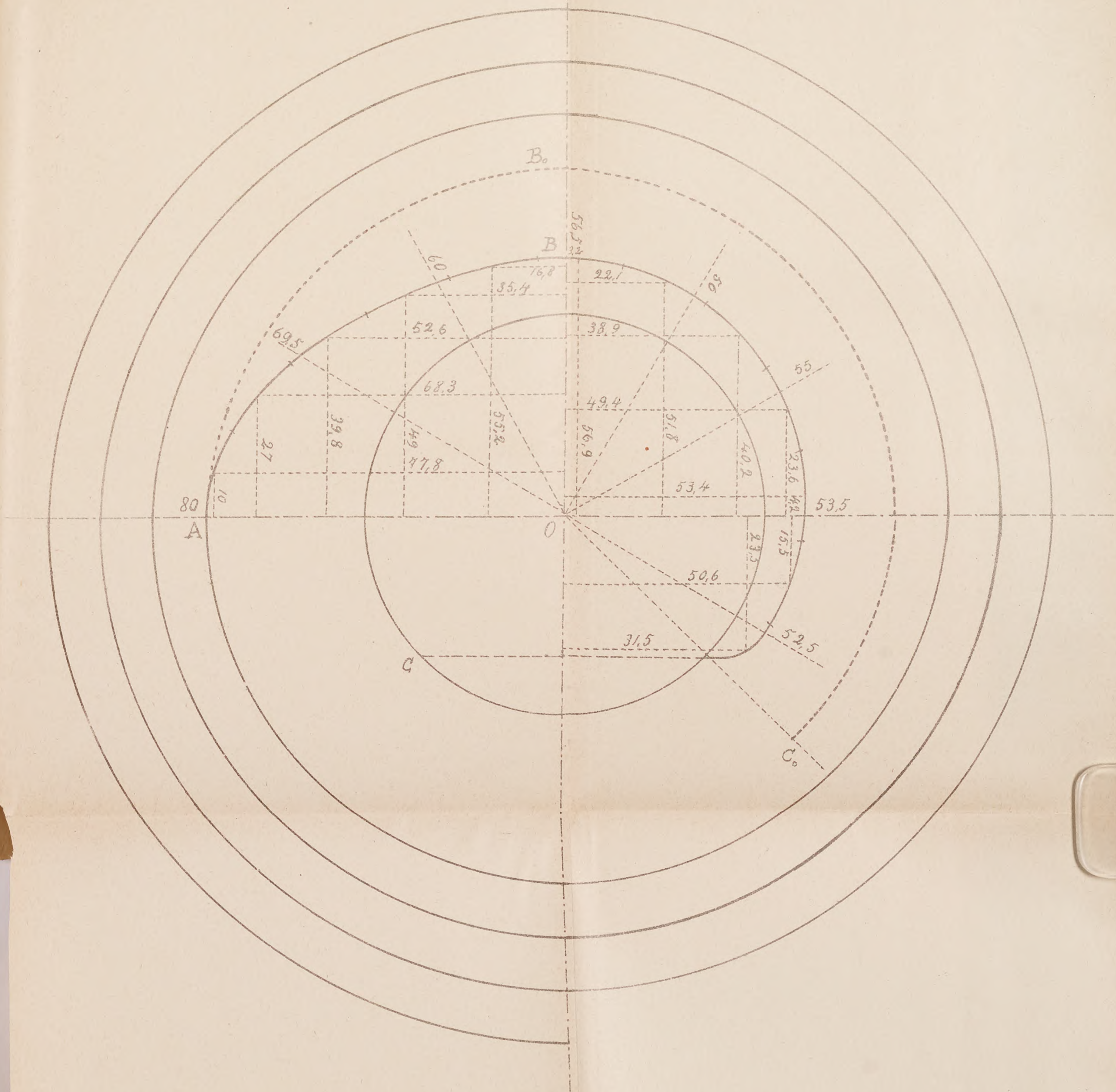


PLANCHE 19


B_0
B
56,5
3,2
16,8
22,1
35,4
60
50
69,5
52,6
38,9
55
68,3
49,4
39,8
49
55,2
56,9
51,8
40,2
23,6
27
47,8
53,4
80
10
4,2
53,5
A
O
23,5
15,5
50,6
52,5
31,5
C
C_0

LANCHE 20

